GIOVANNI GENTILE $j2$

<u>FISSATO</u> $p \in \mathbb{Z}^+$

$c^p(n,k) \overset{\text{DEF}}{=}$ # MODI DI DISTRIBUIRE
k BIGLIE <u>INDISTINGUIBILI</u>
IN n URNE DISTINGUIBILI
IN MODO CHE <u>MAI</u>
PIÙ DI p BIGLIE NELLA STESSA URNA

<u>OVVIAMENTE</u> $c^p(0,k) = \delta_{0k}$

<u>CASI DISGIUNTI & ESAUSTIVI</u>:

IN URNA n POSSONO ESSERCI

0 BIGLIE $\Rightarrow$ #: $c^p(n-1,k)$
+
1 BIGLIA $\Rightarrow$ #: $c^p(n-1,k-1)$
+
$\vdots$
+
p BIGLIE $\Rightarrow$ # $c^p(n-1,k-p)$

<u>SOL RICORSIVA</u>

<u>BAD ELEMENT</u>:
<u>URNA n</u>.

$\Downarrow$

$$\begin{cases} c^p(n,k) = c^p(n-1,k) + \dots + c^p(n-1,k-p) \\ \qquad\quad = \displaystyle\sum_{h=0}^{p} c^p(n-1,k-h) \quad (\dagger) \\ c^p(0,k) = \delta_{0k} \end{cases}$$

<u>SOL. RICORSIVA</u>

SIA $M : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad M(n,k) = c^p(n,k)$

	0	1	2	3	p	k	$\dots$
0	1	0	0	0		0	
1	1	1	1	1	1	0	$\dots$
2							
3							
4							
$n-1$						$\underline{c^p(n-1,k-p)} + \dots + \underline{c^p(n-1,k)}$	
n						$c^p(n,k)$	

RIC.

$p = 2$

	0	1	2	3	4	k	$\dots$	
0	1	0	0	0	$\dots$	0		$\to M_0(t) = 1$
1	1	1	1	0	$\dots$			$\to M_1(t) = 1 + t + t^2$
2	1	2	3	2	1			$\to M_2(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 2t^3 + t^4$
3	1	3	6	7	6	$\dots$		$\to M_3(t) = 1 + 3t + 6t^2 + 7t^3 + 6t^4$
4								
$\vdots$								
$n-1$								
n								

LE MATRICI DI GENTILE SONO MATRICI RICORSIVE

FISSATO $p \in \mathbb{Z}^+$, SI HA

$$M_1(t) = 1 + t + t^2 + \quad + t^p$$

ORA, È VERO CHE

$$M_1(t)\, M_{n-1}(t) \overset{?}{=} M_n(t)$$

$$= \gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \qquad \text{OVE}$$

$$c_k = \sum_{h=0}^{k} e^p(1,h)\, e^p(n-1, k-h)$$

$$= \sum_{h=0}^{p} e^p(n-1, k-h) \qquad (+)$$

$$\overset{\shortparallel}{e^p(n,k)}$$

$$\Longrightarrow \quad M_1(t)\, M_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^p(n,k)\, t^k \overset{\text{DEF}}{=} M_n(t) \quad \text{OK}$$

$$= (M_1(t))^n$$

$$= (1 + t + \dots + t^p)^n$$

COROLLARIO GEN TEOR BINOMIALE

$$(1 + t + \quad + t^p)^n \overset{\text{TAM}}{=} \sum_{k} e^p(n,k)\, t^k$$

SI NOTI :

$p = 1 \Longrightarrow$ F.D.

$p \to \infty \Longrightarrow$ B.E.

$X \longrightarrow X$ e

COMPOSIZIONI DI UN INSIEME / COEFF MULTINOMIALE.

SIA X UN INSIEME, $X = \underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$

UNA COMPOSIZIONE DI X IN k BLOCCHI :

$$(A_1, A_2, \dots, A_k), \quad A_i \subseteq X$$

BLOCCHI T.C.

i) $A_i \cap A_j = \emptyset$ SE $i \neq j$

ii) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = X$

ES $n=4$ $k=3$ → TIPO $(1,2,1)$

$(\{1\},\{2,4\},\{3\}) \neq$

$\neq (\{3\},\{1\},\{2,4\}) \neq (\{1,3\},\emptyset,\{2,4\})$ ← TIPO $(2,0,2)$.

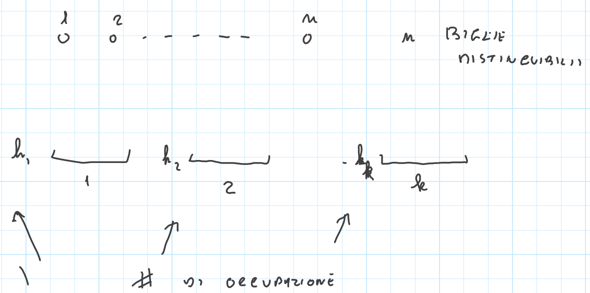
TIPO $(1,1,2)$

TIPO DI UNA COMPOSIZIONE

DATA $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ IL SUO TIPO È LA k-ple ordinata)

$(h_1=|A_1|, h_2=|A_2|, \ldots, h_k=|A_k|)$

SONO BIIETTIVE CON LE DISTRIBUZIONI:



DEF $n \in \mathbb{Z}^+$ $(h_1, \ldots, h_k)$ $h_i \in \mathbb{N}$

$\binom{n}{h_1; h_2; \ldots; h_k} \overset{DEF}{=}$ # k-COMPOSIZIONI DI UN n INSIEME AVENTI TIPO $(h_1, \ldots, h_k)$

COEFF MULTINOMIALE

SI NOTI

$$\sum_{(h_1, \ldots, h_k)} \binom{n}{h_1, h_2, \ldots, h_k} = k^n \quad !!!$$