Wednesday, March 27, 2024 11:14 AM

PARTIZIONE

π è partizione in k blocchi dell'insieme X

se e solo se

$\pi = \{A_1, \dots, A_k\}$, $A_i \in X$

BLOCCHI

TALE CHE

i) $A_i \neq \emptyset$

ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$

iii) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = X$

1) NUMERI DI STIRLING DI II SPECIE

$n, k \in \mathbb{N}$

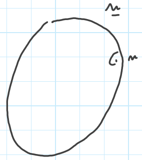
$S(n,k) \overset{DEF}{=} \#$ k-PARTIZIONI DI UN n-INSIEME

FORMA RICORSIVA

SI HA : $S(n,0) = \delta_{n0}$, $S(0,k) = \delta_{0k}$

BAD ELEMENT

$\underline{n}$



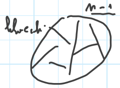
BAD ELEMENT

DUE CASI DISGIUNTI / ESAUSTIVI

i) $\{n\} \rightsquigarrow S(n-1, k-1)$

ii) n NON FA BLOCCO A SÉ :

k blocchi



• n BAD ELEMENT # modi ?

$\rightsquigarrow S(n-1, k) \cdot k$

Quindi:

$$\begin{cases} S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\, S(n-1,k) \\ S(n,0) = \delta_{n0} \ , \ S(0,k) = \delta_{0k} \end{cases}$$

$M : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $M(n,k) = S(n,k)$

	0	1	2	3	4	- -	k
0	1	0	0	0	0	. —	-
1	0	1	0	0	- 0 —	-	
2	0	1	1	0	0	. -	.
3	0	1	3	1	0		
4	0	1	7	6	1	- -	- -

2) NUMERI DI BELL

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$B_n \overset{\text{Def}}{=} \# \text{ PARTIZIONI DI UN } n\text{-INSIEME}$$

$B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$.

$X = \{a, b\}$: $\{\{a, b\}\}$, $\{\{a\}, \{b\}\}$

$B_3 = 5$

$X = \{a, b, c\}$

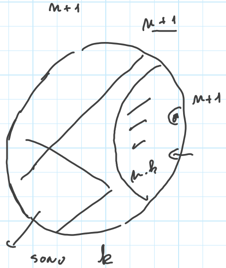
$\{\{a, b, c\}\}$, $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

$\{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\{\{b\}, \{a, c\}\}$, $\{\{c\}, \{a, b\}\}$

FORMULA DI "AITKEN"

$B_0 = 1$, $B_1 = 1$ . .

$B_{n+1} \overset{?}{=}$



SONO k

IN QUANTI MODI POSSO PARTIZIONARE k ELEMENTI ?

B_k

BAD ELEMENT

IL BLOCCO CHE CONTIENE IL BAD ELEMENT POTRÀ AVERE CARDINALITÀ :

$n - k + 1$, CON $k = 0, \dots, n$

FISSATO k , IN QUANTI MODI POSSO SCEGLIERE IL DI CARDINALITÀ $n - k + 1$?

$\binom{n}{n-k}$ MODI

$$B_{n+1} \overset{\text{Thm}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \cdot B_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k .$$

ES

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147