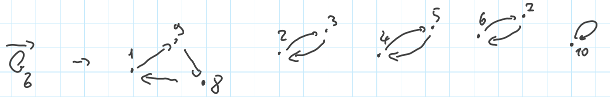
Wednesday, March 27, 2024 11:15 AM

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$\vec{G}_\sigma \to$



$(\ast)$

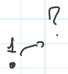
DI TIPO

$1^1\, 2^3\, 3^1 \dots$

THM Ogni grafo di permutazione $\vec{G}_\sigma$ è

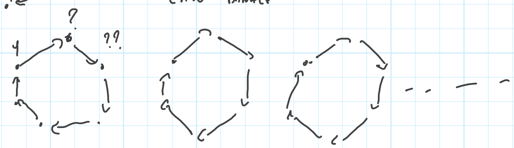
unione disgiunta di grafi ciclici

DIM. Sia $\vec{G}_\sigma$ grafo di permutazione.

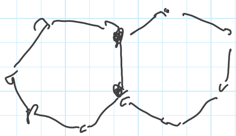


Due casi

1)  Caso banale

2) 

Possono essere non disgiunti? NO



Assurdo!!!

I numeri $C(n,k)$ (almeno di un segno, numeri di Stirling di I specie)

$n,k \in \mathbb{N}$

$$C(n,k) \overset{\text{DEF}}{=} \#\ n\text{-permutazioni in } k \text{ cicli}$$

Forma ricorsiva

$(\ast)$ $C(0,k) = \delta_{0k}$ $\quad C(n,0) = \delta_{n,0}$.

Si noti $C(0,0)=1$ (THM) perché?

Ricordiamo funzione da X a Y.

$F: X \to Y$ è $(\underbrace{X}_{\text{dominio}}, \underbrace{Y}_{\text{codominio}}, R \subseteq X \times Y)$ e $R = \text{graph } F$

ove R è tale .

$\forall x \in X \ \exists . \ y \in Y$ t.c. $x R y$

se $X = Y = \emptyset$ $\quad R = \text{graph } F \subseteq \emptyset \times \emptyset = \emptyset$

$$\Downarrow$$

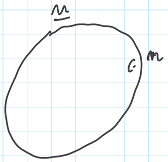
graph $F = \emptyset$ È PERMUTAZIONE!!

(L'UNICA)

DA $C(0,0) = 1$

PERCIÒ $\quad C(n,0) = \delta_{n0} \quad , \ C(0,k) = \delta_{0k}$

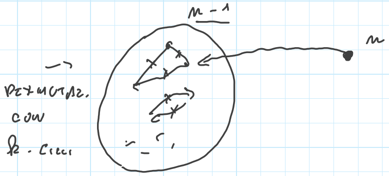
RICORSIONE (BAD ELEMENT)



DUE CASI

1) n SIA CICLO. $\rightsquigarrow C(n-1, k-1)$

2) ALTRIMENTI, CIOÈ n FA CICLO A SÈ.



IN QUANTI MODI?

FRECCIE $= n-1$

MODI $= C(n-1, k)$

IN TUTTO $\quad (n-1)\, C(n-1,k)$ MODI

DA CUI:

THM
$$\begin{cases} C(n,0) = \delta_{n,0} \quad , \ C(0,k) = \delta_{0k} \\ C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)\, C(n-1,k) \end{cases}$$

SIA $\quad M : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad M(n,k) \overset{\text{DEF}}{=} C(n,k)$

	0	1	2	3	4	k
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	. . .	
2	0	1	1	0	0	0

5	0	1	3	1	0		
4	0	1	10	6	1	.	0
n	0						

TIPO DI UNA PERMUTAZIONE

DIREMO CHE $\sigma : \underline{n} \xrightarrow[1-1]{su} \underline{n}$ HA TIPO

$$1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \cdots \quad \text{SE E SOLO SE}$$

1) HA ν_1 CICLI DI LUNGH. 1
2) HA ν_2 CICLI DI LUNGH 2

\- — - -

AD ES (VEDI (*) PRIMA)

$$C(n;\, 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \cdots n^{\nu_n}) \overset{\text{DEF}}{=} \#\ n\text{-PERMUTAZIONI DI TIPO } 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \cdots$$

↗ COEFF. DI CAUCHY

OVVIAMENTE

$$C(n;\, 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \cdots) \neq 0 \iff \sum_{i=1}^{n} i\nu_i = n \quad !!!$$

OVVIO