Wednesday, March 27, 2024 11:16 AM

FORMA CHIUSA (CAUCHY)

"PASTORE INVERSO" DA FAÀ DI BRUNO

COSTRUIAMO UNA PARTIZIONE DI TIPO $1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \dots$

$\underbrace{\cdot \quad \cdot \quad \cdot}_{\nu_1} \quad \underbrace{(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)\dots(\cdot\cdot)}_{\nu_2} \quad \underbrace{(\because)(\because)(\because)}_{\nu_3} \dots$

QUANTE SONO? $P(n; 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \dots)$ FAÀ DI BRUNO

SU CIASCUN BLOCCO DOVREMO METTERE UN CICLO

SUI ν_1 DI CARD 1 AVREMO $(1-1)! = 1$ CICLI

SUI ν_2 DI CARD 2 AVREMO $(2-1)!$ CICLI

SUI ν_3 DI CARD 3 AVREMO $(3-1)!$ CICLI

SUI ν_i DI CARD i AVREMO $(i-1)!$ CICLI

QUINDI

CAUCHY $C(n; 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \dots i^{\nu_i} \dots) =$

$$= P(n; 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \dots i^{\nu_i}) \cdot (1-1)!^{\nu_1} (2-1)!^{\nu_2} (3-1)!^{\nu_3} \dots (i-1)!^{\nu_i} \dots$$

FAÀ DI BRUNO

$$= \left(\frac{n!}{(1!)^{\nu_1} (2!)^{\nu_2} (3!)^{\nu_3} \dots (i!)^{\nu_i} \; \nu_1! \nu_2! \nu_3! \dots \nu_i!} \right) (1-1)!^{\nu_1} (2-1)!^{\nu_2} (3-1)!^{\nu_3} \dots$$

THM

$$= \frac{n!}{1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \dots i^{\nu_i}} \cdot \frac{1}{\nu_1! \nu_2! \nu_3! \dots i!}$$

QED

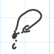
DERANGEMENT

$\sigma : \underline{n} \xrightarrow[1-1]{su} \underline{n}$ È DERANGEMENT

SE E SOLO SE

$\sigma(i) = i \quad \nexists\, i = 1, 2, \dots, n$ ⟺ NON HA PUNTI FISSI

PUNTO FISSO PER σ: $i \in \underline{n}$ T.C. $\sigma(i) = i$



d_n = # DERANGEMENT SU n ELEMENTI.

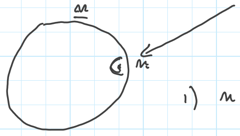
$d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$

$d_3 = 2$

SONO 2

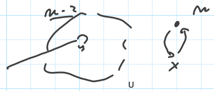
$d_n = ?$

BAD ELEMENT



DUE CASI DISGIUNTI ED ESAUSTIVI

1) n stia in un ciclo di lungh 2.

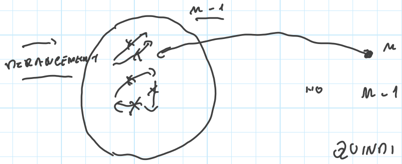


d_{n-2} ho $n-1$ scelte

sono $(n-1)\,d_{n-2}$

2) n stia in un ciclo di lungh > 2. (derangement)

$+$



derangement

ho $n-1$ modi

in d_{n-1} modi

quindi

$\#$ modi $= (n-1)\,d_{n-1}$

Perciò

$$\begin{cases} d_n = (n-1)\left(d_{n-2} + d_{n-1}\right) \\ d_0 = 1 \quad d_1 = 0 \end{cases}$$

$d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, $d_4 = 6$, $d_5 = 32$

$d_6 = 190$, $d_7 = 1332$, $d_8 = 10654$ ...

PROBLEMA GENERALIZZATO

$\sigma : \underline{n} \xrightarrow[1-1]{su} \underline{n}$, $Fix(\sigma) = \{ i \in \underline{n} \; ; \; i$ è pto fisso$\}$

Dati n, k sia

$d_{n,k} = \#$ n-permutazioni tali che $|Fix(\sigma)| = k$

da cui $d_n = d_{n,0}$.

MA: $d_{n,k} = \binom{n}{k} \times d_{n-k}$. !!!

$\#$ modi di scegliere i k pti fissi

· Coeff $C(n,k)$ e num Stirling di I specie $s(n,k)$

PROP $\quad n \in \mathbb{N}$

SIA $\quad \langle x \rangle_n = \underbrace{x(x+1)\cdots(x+n-2)}_{\langle x \rangle_{n-1}}(x+n-1) \quad$ PER $n > 0$

$\langle x \rangle_0 = 1$

ALLORA

$$\langle x \rangle_n \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \cdot x^k$$

PROOF $\quad \langle x \rangle_n = \langle x \rangle_{n-1} \cdot (x+n-1) \qquad (\dagger)$

PERCIO' $\quad$ SCRIVENDO (NOTAZIONE/FATTO)

$$\langle x \rangle_n \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{n} c(n,k) \cdot x^k \qquad (*)$$

DA $(\dagger)$ E DA $(*)$

$$\langle x \rangle_n = \sum_{k=0}^{n-1} c(n-1,k)\, x^{k+1} + (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} c(n-1,k)\, x^k$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)\, c(n-1,k) \\ \text{INOLTRE} \quad c(n,0) = \delta_{n0} \quad , \quad c(0,k) = \delta_{0k} \end{array} \right. \qquad (**)$$

MA $(**)$ È LA STESSA DI

$$\left\{ \begin{array}{l} C(n,0) = \delta_{n0} \quad , \quad C(0,k) = \delta_{0k} \\ C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)\, C(n-1,k) \end{array} \right.$$

PERCIO' $\quad C(n,k) = c(n,k) \quad$ E QUINDI

DA $(*)$ SEGUE

$$\therefore \langle x \rangle_n \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^k \qquad \text{QED.}$$