RICORDO

i) POL. FATT. CRESCENTE

$\langle x \rangle_0 = 1$

$\rightarrow \langle x \rangle_n = x(x+1)\cdots(x+n-1) \qquad n>0$

ii) POL. FATT. DECRESCENTE

$(x)_0 = 1$

$\rightarrow (x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1) \qquad n>0$

SI NOTI $\deg(\langle x \rangle_n) = \deg((x)_n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$\Downarrow$

RMK $\{\langle x \rangle_n ;\ n \in \mathbb{N}\}$ & $\{(x)_n ;\ n \in \mathbb{N}\}$

SONO BASI PER LO SPAZIO DEI POLINOMI $\mathbb{R}[x]$.

INOLTRE, $\{x^n ;\ n \in \mathbb{N}\}$ è BASE PER $\mathbb{R}[x]$.

RICORDO

THM $$\langle x \rangle_n \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^k \qquad !!!$$

DEF. $n,k \in \mathbb{N}$

$$s(n,k) = (-1)^{n-k} \cdot C(n,k).$$

SI HA:

$$(x)_n \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, x^k \qquad !!!$$

NUMERI DI STIRLING DI I SPECIE.

DIGRESSIONE ???

X, Y INSIEMI

$F: X \to Y$ FUNZIONE

$$X \xrightarrow{F} Y$$

1) DEFINISCO UNA RELAZIONE

$\sim_F \subseteq X \times X$ COME SEGUE:

$$x \sim_F x' \overset{\text{DEF}}{\iff} F(x) = F(x')$$

CHIARAMENTE, $\sim_F$ È REL. DI EQUIV.

2) DATA LA REL. EQUIV $\sim_F$

$$X/_{\sim_F} = \underset{\text{PART}}{\Pi_{\sim_F}}$$

INSIEME QUOZIENTE:

È L'INSIEME DELLE CLASSI DI EQUIVALENZA!!

$$\begin{tikzcd} x \in X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi \ su"'] & Y \\ {[x]_{\sim_F}} \in X/_{\sim_F} = \Pi_{\sim_F} \arrow[ur, "\overline{F}\ 1\text{-}1 ?"'] & \end{tikzcd}$$

DIAGRAMMA COMMUTATIVO?

CIOÈ

$$F = \overset{1-1}{\overline{F}} \circ \overset{su}{\pi}$$

DUNQUE $\overline{F} : X/_{\sim_F} = \Pi_{\sim_F} \longrightarrow Y$

COME SEGUE: $\overline{F}\left([x]_{\sim_F}\right) = F(x)$???

È BEN POSTA? CIOÈ

$$[x]_{\sim_F} = [x']_{\sim_F} \overset{?}{\Longrightarrow} \overline{F}\left([x]_{\sim_F}\right) = \overline{F}\left([x']_{\sim_F}\right)$$

MA ORA:

$$[x]_{\sim_F} = [x']_{\sim_F} \iff x \sim_F x' \iff F(x) = F(x') \iff \overline{F}\left([x]_{\sim_F}\right) = \overline{F}\left([x']_{\sim_F}\right)$$

$(\quad \Longrightarrow \quad \Longrightarrow \quad \Longrightarrow$ BEN POSTA $)$

$(\quad \Longleftarrow \quad \Longleftarrow \quad \Longleftarrow$ $\overline{F}$ È 1-1 $)$

THM $F : X \to Y$ SI SCRIVE IN MODO UNICO

$$F = \underset{1-1}{\overline{F}} \circ \underset{su}{\pi} \quad !!!$$

COME CONSEGUENZA, SI HA:

$$\{F : X \to Y\} \underset{1-1}{\overset{su}{\longleftrightarrow}} \dot{\bigcup_{\substack{\Pi \text{ PART} \\ \text{DI } X}}} \left\{ \overline{F} : \Pi \overset{1-1}{\longrightarrow} Y \right\} \qquad (*)$$

MA SIANO X, Y FINITI, DICIAMO

$X = \underline{n}$, $Y = \underline{m}$ ALLORA $(\ast)$ IMPLICA

$$m^n = \left| F : \underline{n} \to \underline{m} \right| = \sum_{\substack{\pi \text{ PART.} \\ \text{DI } \underline{n}}} \left| \bar{F} : \pi \xrightarrow{1-1} \underline{m} \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \Big(\underline{\underline{\sum_{\pi\ k\text{-PART}}}} \underbrace{\left| \bar{F} : \pi \xrightarrow{1-1} \underline{m} \right|}_{(m)_k} \Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(m)_k .$$

<u>PERCIÒ</u>

<u>THM 1</u> $\forall m \in \mathbb{Z}^+$ SI HA

$$m^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(m)_k \qquad ||| \ (\dagger)$$

1) MA ORA m^n È LA VALUTAZIONE IN m DI x^n

2) $(m)_k$ " " " $(x)_k$.

3) $\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(m)_k$ È LA VAL IN m DEL POLINOMIO

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k \qquad \underline{\text{VERO } \forall m \in \mathbb{N}} \ !!!$$

$(\dagger)$ MI DICE CHE

x^n & $\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k$ <u>HANNO INFINITE</u> <u>VALUTAZIONE UGUALI</u>

$(\forall m \in \mathbb{N})$

$\Downarrow$

SONO UGUALI

COME POLINOMI (IN $\mathbb{R}[x]$).

THM 1 $\Rightarrow$

<u>THM 2</u> IN $\mathbb{R}[x]$, SI HA

$$x^n \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k \quad !!! \quad \underline{\forall n,k \in \mathbb{N}}$$

MA RICORDO

THM IN $\mathbb{R}[x]$, SI HA

$$(x)_n \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, x^k \quad . \; .$$