SIA $(P, \leq)$ UN **POSET** **FINITO**.

LA FUNZIONE DI MÖBIS DI $(P, \leq)$

È L'UNICA FUNZIONE

$$\mu_P : P \times P \longrightarrow \mathbb{Z}$$

TALE CHE $\qquad x, y \in P$

i) $\mu_P(x, y) = 0$ SE $x \nleq y$

ii) $\mu_P(x, x) = 1$

iii) $\mu(x, y) =$ $\qquad x < y$

$$= -\sum_{z:\ x \leq z < y} \mu(x, z) = -\sum_{z:\ x < z \leq y} \mu(z, y).$$

PRINCIPIO DI INVERSIONE (CASO INSIEMISTICO)

S INSIEME FINITO

SIA $(P, \leq) = (\mathbb{P}(S), \subseteq)$

ALLORA LA FUNZ. DI MÖBIUS HA UNA FORMA SEMPLICE:

$A, B \in \mathbb{P}(S) \qquad (A, B \subseteq S)$

SI HA

1) $\mu(A, B) = 0$ SE $A \nsubseteq B$

2) SE $A \subseteq B$, $\mu(A, B) = (-1)^{|B| - |A|}$!!

PRINCIPIO DI INVERSIONE DI MÖBIUS (CASO INSIEMISTICO)

THM IN $(\mathbb{P}(S), \subseteq)$ (S INSIEME FINITO).

SIANO

$$f, g : \mathbb{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

TALI CHE

$$(*) \quad \sum_{A \subseteq B} f(A) = g(B) \quad \forall B \in \mathbb{P}(S) \quad (B \subseteq S)$$

REL. DIRETTA

ALLORA

$$f(B) = \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B| - |A|} g(A) \quad \forall B \in \mathbb{P}(S). \quad (**)$$

APPLICAZIONE $\#\{F: k \ \overset{su}{\longrightarrow} \ldots\} = ?$

APPLICAZIONE $\#\{F: \underline{k} \to \underline{m}\}$.

INVERSIONE DI MÖBIUS SU $(\mathbb{P}(\underline{m}), \subseteq)$.

DEFINIAMO

i) $f: \mathbb{P}(\underline{m}) \to \mathbb{R}$ COME SEGUE

$\forall A \in \mathbb{P}(\underline{m})$ SIA

$$f(A) = \#\{F: \underline{k} \to \underline{m} \, ; \, \mathrm{Im}\, F = A\}$$

ii) $g: \mathbb{P}(\underline{m}) \to \mathbb{R}$ COME SEGUE

$\forall B \in \mathbb{P}(\underline{m})$ SIA

$$g(B) = \#\{F: \underline{k} \to \underline{m} \, ; \, \mathrm{Im}\, F \subseteq B\}$$

$$\#\Big\{ \overbrace{\{F: \underline{k} \to \underline{m} \, ; \, \mathrm{Im}\, F \subseteq B\}}^{= g(B)} = \dot{\bigcup_{A \subseteq B}} \underbrace{\{F: \underline{k} \to \underline{m} \, ; \, \mathrm{Im}\, F = A\}}_{\# = f(A)}$$

DA CUI, È VERO CHE $\forall B \in \mathbb{P}(\underline{m})$

$$\sum_{A \subseteq B} f(A) = g(B)$$

$\Downarrow$ INVERSIONE DI MÖBIUS

$$(\gamma) \quad f(B) = \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} g(A) \qquad \forall B \in \mathbb{P}(\underline{s}).$$

ORA NOTIAMO CHE SE $B = \underline{m}$

$$f(\underline{m}) = \#\{F: \underline{k} \to \underline{m} \, ; \, \mathrm{Im}\, F = \underline{m}\}$$

$$= \#\{F: \underline{k} \xrightarrow{su} \underline{m}\}$$

DA (γ)

$$= \sum_{A \subseteq \underline{m}} (-1)^{m-|A|} g(A)$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \Big(\sum_{\substack{A \subseteq \underline{m} \\ |A| = j}} (-1)^{m-j} g(A) \Big)$$

$$\#\{F: \underline{k} \to A\} = j^k \quad \text{con } A : |A| = j$$

$$= \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} j^k$$

$$\#\{F: \underline{k} \xrightarrow{su} \underline{m}\} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} j^k \qquad \text{THM}$$