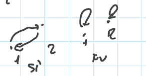
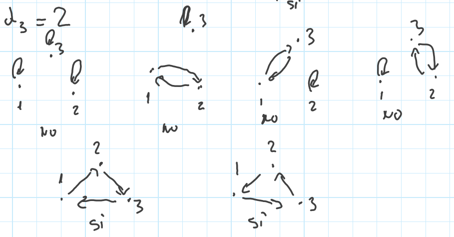
Wednesday, March 27, 2024 11:22 AM

$d_n = \#\{\sigma : \underline{n} \xrightarrow[1-1]{su} \underline{n}\ ;\ \sigma$ perm SENZA PUNTI FISSI $\}$

$d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$

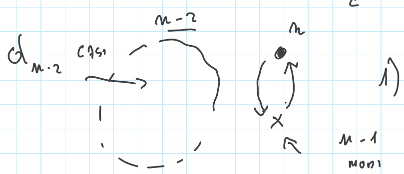


$d_3 = 2$



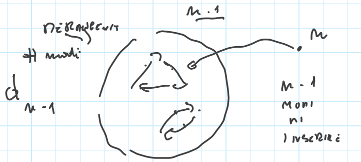
$d_n = ?$

BAD ELEMENT



1) n APPARTIENE AD UN CICLO DI LUNG. 2

$(n-1)\, d_{n-2}$



2) n È UN CICLO DI LUNGH > 2

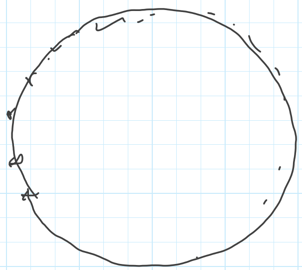
SOL $(n-1)\, d_{n-1}$

QUINDI $d_n = (n-1)(d_{n-2} + d_{n-1})$

MENAGE PROBLEM

ORIGINE 1891

KNOT THEORY (GEOMETRIA/TOPOLOGIA)
+
MECCANICA STATISTICA



TAVOLO CIRCOLARE CON $2n$ POSTI.

NOI n COPPIE MOGLIE MARITO

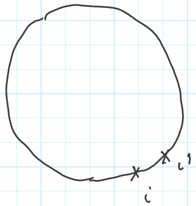
$\{1, 2, \dots, n\}$ MOGLI

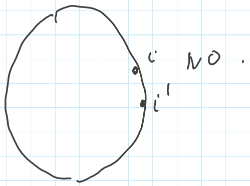
$\{1', 2', \dots, n'\}$ MARITI

PROBL | IN QUANTI POSSO FARE SEDERE |

LE n SIGNORE E GLI n SIGNORI
IN MODO CHE MAI IL MARITO
DELLA SIGNORA i LE SIA SEDUTO A FIANCO -

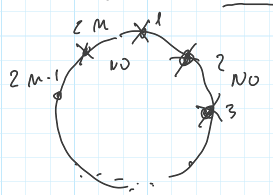
VUOLE DIRE





PREMESSA IL PROBLEMA DI GERGONNE CIRCOLARE

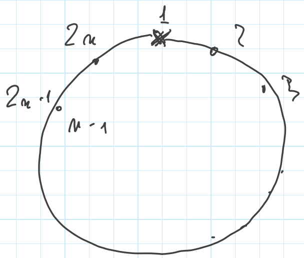
SU $2n$ ELEMENTI



k SOTTOINSIEMI NON CONTENGANO ELEMENTI ADIACENTI

SOL DUE CASI:

IL k-INSIEME S CONTENGA 1

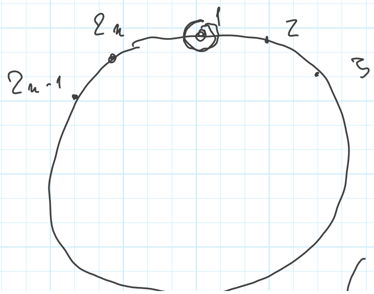


$k-1$ ELEMENTI DI S SONO IN $\{3, 4, \ldots, n-1\}$

MODI:

$$\binom{2n-3-k+1+1}{k-1} = \binom{2n-k-1}{k-1}$$

2) IL k-SOTTOINSIEME S NON CONTIENE 1



S È SOTTOINSIEM SENZA ADIACENTI DI

$$\{2, 3, \ldots, 2n\}$$

SOL

$$\binom{2n-1-k+1}{\ } =$$

$$\ldots \binom{\quad}{k} -$$

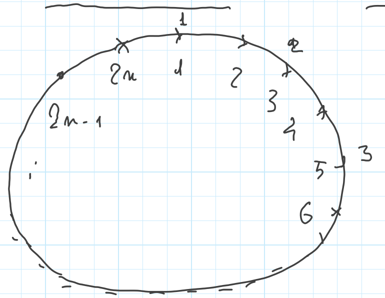
$$= \binom{2n-k}{k}$$

SOL
$$\binom{2n-k-1}{k-1} + \binom{2n-k}{k} = \boxed{\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}}$$

SOL PROBL. DI PERSONE CIRCOLARI SU $2n$ ELEMENTI

PROBLEMA DEI MENAGE RIDOTTO;

CIOÈ LE n SIGNORE SONO GIÀ SEDUTE IN ORDINE CRESCENTE NEI POSTI DISPARI.



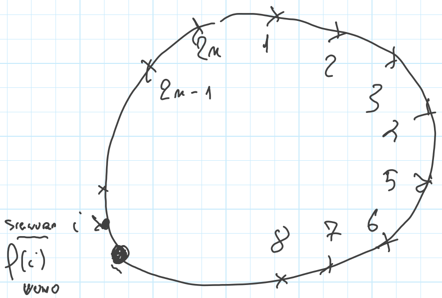
E DEVO FARE SEDERE GLI UOMINI $\{1', 2', \ldots, n'\}$.

IL PIAZZAMENTO DEI SIGNORI È DESCRITTO DA UNA FUNZIONE

$$f : \underbrace{\underline{n} = \{1, \ldots, n\}}_{\text{SIGNORE}} \longrightarrow \underbrace{\underline{n}' = \{1', 2', \ldots, n'\}}_{\text{SIGNORI}}$$

OVE

$f(i) \overset{\text{DEF}}{=}$ IL SIGNORE $f(i)$ SEDUTO AD ~~DESTRA~~ SINISTRA DELLA SIGNORA i.



LA SOL DEL PROBL RIDOTTO SI OTTIENE DA SYLVESTER

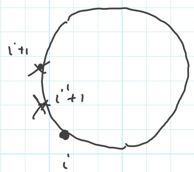
SIA $\Omega = \{ f : \underline{n} = \{1,2,\dots,n\} \to \underline{n}' = \{1',2',\dots,n'\} \}$

CON EVENTI PROIBITI COSÌ DEFINITI: (SONO $2n$ EVENTI PROIBITI)

1) PER $i = 1,2,\dots,n$

SIA

$$A_{2i-1} = \{ f : \underline{n} \to \underline{n}' ;\ f(i) = i' \}$$



2) PER $i = 1,2,\dots,n-1$

$$A_{2i} = \{ f : \underline{n} \to \underline{n}' ;\ f(i) = (i+1)' \}$$

3) $A_{2n} = \{ f : \underline{n} \to \underline{n}' ;\ f(n) = 1' \}$

QUINDI

$$SOL = \left| \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{2n} A_j \right| \quad \text{SYLVESTER}$$

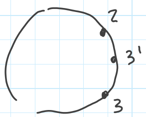
$$= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \left(\sum_{\substack{T \subseteq \underline{2n} \\ |T| = k}} \left| \bigcap_{j \in T} A_j \right| \right) \quad (\dagger)$$

MA ORA

$\bigcap_{j \in T} A_j = \emptyset$ SE T CONTIENE DUE ELEMENTI ADIACENTI IN SENSO CIRCOLARE !!!

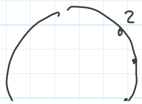
AD ES $2,3 \in T$

$A_2 \cap A_3$

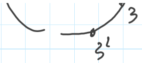


A_2

IMPOSSIBILE



A_3



2) SE T NON CONTIENE ADIACENTI IN SENSO CIRCOLARE

$$\left|\bigcap_{j\in T} A_j\right| = (n-k)!$$

QUINDI $(\dagger)$ DIVENTA

$$U_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

$\uparrow$ SOL PROBL RIDOTTO

$\uparrow$ # $T \subseteq 2n$ $|T|=k$ T BUONO

DA RIDOTTO A GENERALE

$2 \quad n! \quad U_n$

PARI + DISPARI — ORDINE QUALSIAS DELLE DONNE

QUINDI

$$2n!\,U_n$$

È LA SOL DEL PROBLEMA GENERALE.

CON $U_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$

SOL J. TOUCHARD NEL 1934

1891 $\longrightarrow$ 1934 !!!

PROBL SOL