Maurizio Spurio

Meccanica Newtoniana

per un approccio propedeutico alla fisica moderna

Seconda Edizione - 2025

M.Spurio

Come ringraziamento al più grande didatta incontrato,
il prof. Attilio Forino.

Non ho delle pretese,
il merito l'è tutto
della scuola bolognese!
(G. Puccini: Gianni Schicchi, libretto di G. Forzano)

Prefazione alla seconda edizione

La seconda edizione di questo manuale vede aggiungersi il capitolo sulle *Proprietà e dinamica dei fluidi* e contiene nuove sezioni ed esercizi in diversi capitoli, in aggiunta a piccole correzioni e revisioni del testo. Per le segnalazioni, commenti e suggerimenti sono grato ai numerosi studenti che hanno utilizzato negli scorsi anni la prima versione a stampa e ai colleghi, in particolare la prof.ssa Annarita Margiotta, per i molti commenti al testo. Gli argomenti presentati nel manuale sono quelli tradizionalmente affrontati in un corso semestrale di almeno 9 CFU, come ormai si sta consolidando al primo anno del corso di laurea in Fisica. Alcuni argomenti possono essere omessi, o consigliati per una sola lettura, inclusi gli argomenti più complessi affrontati negli ultimi capitoli. La cinematica e dinamica dei fluidi permette di ampliare la conoscenza sugli operatori differenziali già utilizzati nel Cap. 6 e introduce alcuni aspetti sul calcolo differenziale che sono di fondamentale importanza per gli studi dell'elettromagnetismo e che talvolta sono affrontati in modo molto formale nei corsi di matematica. L'esposizione è svolta in modo tale che anche uno studente di Fisica alla fine del primo semestre (o del primo anno) possa apprezzarli.

Nonostante la scrupolosa lettura degli studenti e di alcuni colleghi, e l'attenzione posta dell'autore, è altamente probabile che qualche errore o imprecisione sia sopravvissuto. Nel caso, sarò grato a chi volesse segnalarmeli.

Prefazione alla prima edizione

Questo libro introduce i concetti e le applicazioni della meccanica classica nel formalismo Newtoniano pensando agli studenti di discipline scientifiche che proseguiranno i loro studi incontrando la fisica moderna.

La meccanica classica è la base di riferimento di ogni studio a livello universitario di discipline tecnico-scientifiche. Uno dei problemi che ho incontrato, quando ho iniziato a insegnare al corso di Meccanica per studenti del corso di laurea in Fisica, è la selezione di un libro di testo adeguato. Consultando i manuali esistenti, ho l'impressione che gli aspetti fondanti non siano sempre messi sufficientemente in evidenza. Questo ha come conseguenza che gli studenti universitari spesso si aspettano dal corso di Meccanica una ripetizione di quanto affrontato nelle scuole superiori, magari con un formalismo matematico più avanzato, e non la presentazione della teoria che è alle fondamenta anche della fisica moderna. In particolare, buona parte dei libri in commercio (sia quelli tradotti dall'inglese, sia quelli di autori italiani con edizioni rinnovate e ancora in stampa) pongono l'enfasi su applicazioni idealizzate su scala delle dimensioni umane. Una significativa frazione dei testi è occupata da esempi basati su argani, aste, piani inclinati,... e gli studenti spesso sono disorientati perché i concetti cardine sono annegati in un numero molto ampio di esempi artificiosi.

La dinamica Newtoniana non è solo uno strumento efficiente per la soluzione di problemi di fisica applicata e ingegneria, ma è una teoria affascinante ancorata alle domande di base poste sin dai tempi dei filosofi greci. Si pensi ai concetti di spazio, dello scorrere del tempo, di come effettuare misure e confrontarle con la realtà, di quali e cosa sono i principi fisici che regolano l'evoluzione dell'universo. Il mio scopo è stato quello di scrivere un testo di meccanica per incoraggiare gli studenti a pensare a questi aspetti fondamentali e per introdurre come, nella fisica moderna, verranno affrontati e talvolta risolti.

Esempi, applicazioni e il modo di ricavare un risultato da un problema sono aspetti estremamente importanti, sia per studenti delle scienze di base che per quelli indirizzati verso le discipline più tecniche. Tuttavia, ritengo che gli studenti dei corsi di laurea in Fisica, Matematica, Chimica e gli studenti di Ingegneria che affronteranno la fisica moderna potranno maggiormente avvantaggiarsi di un approccio in cui gli aspetti di meccanica classica vengano propedeuticamente tradotti in termini delle conoscenze attuali. Ad esempio, anche se all'epoca di Newton nulla si sapeva sulla struttura atomica della materia, è evidente che questa ha un ruolo decisivo sugli aspetti macroscopici coperti dalla Meccanica.

Quesiti, esempi ed esercizi tradizionali sono comunque importanti. Essi coesistono con esercizi più innovativi e sono inseriti alla fine di ogni capitolo, con riportate le soluzioni numeriche. Il consiglio agli studenti è che, inizialmente, nel periodo delle lezioni affrontino la soluzione di alcuni problemi anche in piccoli gruppi, in modo da confrontarsi e cercare di ottenere la soluzione numerica riportata. Nel caso si debba affrontare all'esame una prova scritta, nelle ultime settimane gli esercizi vanno affrontati invece individualmente.

Il libro non ha lo stesso grado di difficoltà dal principio alla fine. Come la saga di Herry Potter inizia con lo stile di un libro per bambini quando il maghetto inizia la scuola di magia e finisce con i toni dark della tragedia della guerra civile dell'ultimo volume, qui i primi capitoli assumono che lo studente abbia le conoscenze di base delle scuole superiori, mentre i successivi recepiscono la crescita in corso e progressivamente utilizzano quanto acquisito nei paralleli corsi del semestre. Questo è vero anche per quesiti ed esercizi: negli ultimi capitoli, esercizi composti, dove è richiesto quanto introdotto in quelli precedenti, sono più frequenti.

La meccanica classica non è la teoria definitiva, sia nella versione Newtoniana qui riportata che nelle versioni Lagrangiana e Hamiltoniana che gli studenti incontreranno come passaggio intermedio prima della fisica moderna. La teoria ha avuto enorme successo (non solo per mandare l'uomo sulla Luna) ma anche crisi profonde che si sono evidenziate a partire dall'inizio del secolo scorso. Ho cercato di mettere il rilievo questi aspetti di successo e i limiti che porteranno agli sviluppi recenti. Il libro ovviamente non è un libro di storia della fisica, e non segue una rigorosa sequenza temporale di come le cose si sono susseguite da Galileo in poi. Non entro nelle diatribe e dispute (anche molto vivaci) sulle priorità delle scoperte. Tuttavia, ho talvolta riportato brevi cenni anagrafici dei principali protagonisti: sono solo utili per inquadrare i periodi storici in cui si sono svolti gli studi e recepire anche l'accelerazione avvenuta nelle scoperte scientifiche.

Un problema sentito è stato quello della scelta della notazione: con quale lettera indicare ciascuna delle grandezze fisiche introdotte. Alla fine, ho deciso di uniformare il testo allo standard ISO. Questo è l'acronimo di *International Organization for Standardization*, che indica la più importante organizzazione mondiale per la definizione di norme tecniche. In particolare, adotto lo standard ISO 80000 sulle grandezze e unità di misura `https://it.wikipedia.org/wiki/ISO/IEC_80000`.

Alcune sezioni sono segnalati con il simbolo (*). Questo significa che la matematica coinvolta nel paragrafo è mediamente più complessa, o che l'argomento può essere affrontato anche in seconda lettura.

Il testo si basa sulle lezioni svolte al primo anno del corso di laurea in fisica dell'Università di Bologna, e bozze del testo hanno subito la revisione di molti studenti nonché di alcuni colleghi. Tuttavia imprecisioni, errori di battitura o errori più gravi possono sempre essere rimasti e sono grato a chiunque voglia segnalarmeli. Per gli esercizi e quesiti, intendo ringraziare i colleghi che hanno contribuito con le esercitazioni del corso di Meccanica a elaborare, modificare, risolvere quelli qui proposti: il prof. L. Guiducci, il dr. Nicolò Masi, la dott.ssa Giulia Illuminati e il dr. Filippo Sala.

Maurizio Spurio, maurizio.spurio@unibo.it.
Bologna, Aprile 2023.

Indice

1

Grandezze fisiche e unità di misura

1.1 La Fisica e il metodo scientifico

La parola **fisica** deriva dal greco antico e significa, letteralmente, **natura**. Inizialmente, dai tempi di Aristotele, la fisica indicava lo studio di tutte le leggi naturali. L'applicazione del termine, nel tempo, si è sempre più ristretta. Ancora all'epoca di Newton e Galileo, il termine univa tutte le discipline empiriche (talvolta con confusione nell'ambito di quelle che oggi chiameremmo *pseudo-scienze*, come l'alchimia). Nel corso del 1700, la parola $fisica$ ha cominciato a delimitare lo studio della natura inorganica, da cui successivamente si è separata la *chimica*, che ha acquisito competenze specifiche.

Il punto di svolta che si è rivelato decisivo per separare la scienza da discipline pseudo-scientifiche è la procedura (sviluppata da Galileo e da altri autori successivi: Cartesio, Newton, ...) che ha portato alla definizione del **metodo scientifico**. Questo rappresenta lo strumento efficace per selezionare le ipotesi o le leggi: il metodo impone di sottoporre le idee alla prova dei fatti, ed eliminare quelle che risultano non funzionati.

Non esiste un protocollo unico che caratterizza il metodo scientifico. In genere, il processo si basa su una serie di passaggi. Il primo aspetto è cercare di caratterizzare il meglio possibile il soggetto di indagine. È opportuno cercare di rimuovere tutti quegli aspetti che possono presentare delle complicazioni (ad esempio, gli attriti), che potranno poi essere introdotti successivamente. Vi è poi la fase di raccolta delle informazioni con le osservazioni. In molti casi si tratta di osservazioni preesistenti, pubbliche, di attendibilità verificata. Oggi, ad esempio, non possiamo basarci su materiale reperito semplicemente in rete. I dati potrebbero essere genuini e corretti, ma potrebbero essere stati acquisiti con qualche forma di pregiudizio (*bias* in inglese) che potrebbe pregiudicare la correttezza delle conclusioni. Normalmente, dovrebbero essere usati solo informazioni che sono state sottoposte a giudizio di *peer-review* (vedi oltre)..

In base a queste osservazioni, possiamo cercare di formulare una ipotesi esplicativa: un semplice modello, o una teoria matematica più strutturata. Nel caso di diversi possibili modelli alternativi, possiamo scegliere quello che ci appare più semplice, con un numero minore di ipotesi *ad hoc* per spiegare il fenomeno. Successivamente, dobbiamo cercare di dedurre le conseguenze del modello che abbiamo costruito, con eventualmente la progettazione di esperimenti che possano verificare o smentire l'ipotesi formulata. In particolare, dobbiamo prevedere quali osservazioni ed esperimenti potrebbero dimostrarla falsa (processo di falsificabilità). Presenterò un esempio particolarmente istruttivo in Sez. 9.6 nel caso delle proprietà di simmetria per riflessione speculare.

La successiva fase di esecuzione degli esperimenti e raccolta di dati in maniera riproducibile può avvenire su scale di tempi anche lunghi, e con gruppi sperimentali che lavorano in parallelo, in maniera cooperativa oppure competitiva. Ad esempio, partire da (circa) il 1980 diversi gruppi sperimentali nel mondo iniziarono a pensare di costruire uno strumento per la rivelazione di *onde gravitazionali.* Per due decenni, i gruppi furono in competizione tra di loro: ciascuno riusciva a migliorare sensibilmente qualche aspetto tecnico, ma sempre senza riuscire a compiere l'impresa. A un certo punto, decisero di mettere in comune le conoscenze acquisite, e la collaborazione tra diversi gruppi statunitensi ed europei ha portato alla rivelazione della prima onda gravitazionale il 14 settembre 2015 e all'apertura di una nuova branca dell'astrofisica.

La fase di analisi dei dati, in particolare le informazioni su come i dati acquisiti sono processati, deve comunque essere pubblica. Nel 2011, grande clamore fece la notizia che una misura da parte di un esperimento ai Laboratori del Gran Sasso della velocità dei neutrini (particelle elementari) mostrava che viaggiavano superando la velocità della luce. La fase di aperta discussione portò in pochi mesi a evidenziare un errore hardware in una connessione in fibra ottica dell'esperimento. Corretto l'errore, i neutrini tornavano a viaggiare a velocità non superiore a quella della luce.

La fase successiva di interpretazione dei dati ed elaborazione di una conclusione può servire a confermare (o confutare) il modello di partenza, oppure a meglio adattarlo in base alle osservazioni. Nelle diverse fasi, i risultati e i confronti dati/esperimento sono sempre pubblici, pubblicati su riviste che adottino la procedura di $peer - review$.

La peer-review è il procedimento di revisione paritaria degli articoli scientifici. Dopo che un autore (o un gruppo) sottopone il manoscritto dell'articolo a una rivista, un redattore (*editor*), competente della materia, invia l'articolo a 2 o 3 revisori ($referee$), esperti di fama del medesimo settore, che rimarranno sempre anonimi e sconosciuti all'autore (o per un certo periodo, normalmente di almeno 50 anni). I referee possono consigliare o sconsigliare la pubblicazione dell'articolo, oppure consigliare la pubblicazione soltanto dopo una revisione, oppure invitare gli autori a rispondere ad alcune obiezioni. Sulla base del parere dei revisori, l'editor decide se pubblicare o meno l'articolo o se attendere la successiva revisione. Questo protocollo è utile come possibile filtro contro errori di metodo e altri difetti volontari o involontari. Inoltre, evita l'inquinamento da parte di lavori non scientifici o pseudo-scientifici. Per fare un esempio, io ricevo tra 10 e 20 richieste di valutazione di articoli per anno. Non di tutti gli argomenti mi sento sufficientemente esperto, e rifiuto per quelli la valutazione. Tutto ciò che non adotta questo metodo è da classificarsi pseudo-scientifico. Occorre fare attenzione: le pseudo-scienze sono metodi o pratiche che affermano di essere scientifiche (o vogliono apparire scientifiche) ma che non rispettano in qualche aspetto fondamentale il metodo scientifico sopra esposto, principalmente contravvenendo ai requisiti di verificabilità. Mentre alcune pseudo-scienze sono in molti casi futili ma innocue (l'astrologia), altre sono potenzialmente molto pericolose in quanto sostituiscono, ad esempio, pratiche mediche certificate con acqua (omeopatia), oppure sostengono dannose le vaccinazioni che salvaguardano la vita propria e quella degli altri.

1.2 Grandezze misurabili e il Sistema Internazionale

Il campo di indagine della fisica è quello delle grandezze osservabili e misurabili. Ad esempio, anche se tutti sappiamo cosa sia, non possiamo quantificare una grandezza del tipo *quanto bene vogliamo alla mamma*. La quantità di amore verso la mamma, non essendo una grandezza misurabile, non rientra nell'ambito della fisica.

Sin dall'antichità ci si rese conto che per scambiare informazioni era necessario un qualche metodo per rendere oggettive e quantificabili grandezze quali la quantità di materia (la *massa*), i *tempi* e le misure di *distanze*. Legate alle distanze, vi sono grandezze derivate quali le misure di aree e volumi.

Sino all'epoca della rivoluzione Francese e dell'avvento di Napoleone, ciascuna nazione, città stato, ducato, frazione di comune faceva come voleva in quanto a misure di lunghezze e masse. Per esempio, a Bologna nella piazza dell'allora mercato (Fig. 1.1) sono collocate le unità di lunghezza da usare per il commercio. Il piede bolognese, lunghezza base del sistema metrico locale, corrispondente a circa 38 cm; la pertica, equivalente a 10 piedi; il braccio, lungo circa 64 cm; infine il doppio braccio. Accanto a queste figurano anche i modelli di un mattone e di una tegola di dimensioni standard. Se visitate Ferrara, all'ingresso del Castello Estense vi sono simili campioni, ovviamente di diversa lunghezza. Cercate nelle vostre città, confrontate col piede bolognese, e mettetevi nei panni dei poveri mercanti dell'epoca quando dovevano recarsi o fare scambi "all'estero".

Napoleone decise che gli standard francesi andavano bene per tutti [1]. L'attuale Sistema Internazionale di unità di misura (in vigore dal 1961), abbreviato in SI, è la versione moderna del sistema metrico decimale elaborato da una commissione dei rivoluzionari francesi presieduta da Lagrange dal 1791.

Nel corso del tempo si sono aggiunte, oltre al metro, altre unità di misura di base, fino ad arrivare a sette grandezze (nel 1971). La Tab. 1.1 le elenca. Tutte le altre unità di misura si ricavano da queste e sono quindi dette unità derivate.

[1] Ovviamente, gli inglesi non furono d'accordo.

Figura 1.1. Nei pressi di Piazza Maggiore a Bologna, sul lato orientale del Palazzo Comunale e di fronte alla statua del Nettuno, sono collocati, dal 1547, i campioni delle unità di misura in uso nella città durante il Medioevo.

A ciascuna grandezza fondamentale viene assegnata una **dimensione fisica**, che viene indicata entro parentesi quadra: per le lunghezze, il simbolo è [L], ad esempio. Le dimensioni fisiche sono riportate nella seconda colonna. Il nome dell'unità di misura, e il simbolo adottato nell'ambito del SI, sono invece riportati nella terza e quarta colonna.

Grandezza base	Simbolo dimensionale	Nome unità di misura	Simbolo
Lunghezza	[L]	metro	m
Intervallo di tempo	[T]	secondo	s
Massa	[M]	chilogrammo	kg
Intensità di corrente	[I]	ampere	A
Temperatura	[Θ]	kelvin	K
Intensità luminosa	[J]	candela	cd
Quantità di sostanza	[N]	mole	mol

Tabella 1.1. Le sette grandezze fondamentali: nome, simbolo dimensionale, unità di misura utilizzata nel SI e abbreviazione. Tutte le altre grandezze che verranno introdotte saranno derivate da queste sette, con dimensioni opportune. Ad esempio, la velocità ha dimensioni di [L T^{-1}].

Nell'ambito della meccanica classica, solo le prime tre grandezze sono necessarie: distanze, tempo e masse. Le altre grandezze che incontreremo (velocità, accelerazione, forza, energia, ...) si fondano sulle tre fondamentali che hanno dimensione [L], [T] e [M]. Le altre quattro grandezze fondamentali saranno introdotte nei corsi successivi. Tutte le grandezze che sono necessarie per gli studi di fisica sono dedotte a partire dalle sette fondamentali elencate in tabella.

Vi è un settore della fisica che si occupa proprio di *metrologia*, ossia delle questioni inerenti alla misurazione delle grandezze fisiche, all'analisi e al calcolo dimensionale, alla scelta dei sistemi di unità di misura. [2] Diversi infatti

[2] L'Istituto nazionale di ricerca metrologica (INRiM) è il presidio in Italia di questa disciplina.

sono stati i modi in cui, al variare degli anni, sono state definite le grandezze fondamentali. In tutti i casi, i requisiti che devono avere i campioni di misura sono quelli della **precisione**, della **accessibilità**, della **riproducibilità** e della **inalterabilità**.

Dal 20 maggio 2019 nel SI la definizione delle unità di misura associate alle sette grandezze fisiche fondamentali si ottiene a partire dal valore numerico fissato di 7 costanti fisiche. Maggiori informazioni sono reperibili sul sito del Bureau International des Poids et Mesures `https://www.bipm.org/en/home`. Per avere sotto controllo questa "versione finale", tuttavia, dovete prima studiare la fisica moderna per capire a quali grandezze corrispondono le sette costanti scelte. Ritengo invece utile una breve sintesi (parziale) del percorso storico che porta alla definizione dei campioni delle unità di misura fondamentali che useremo nel corso: metro, secondo, chilogrammo.

1.2.1 Misure di distanze

Il primo tentativo di unificare la misura della distanza avvenne nel 1795 da parte dell'Accademia delle Scienze Francese, che definì il *metro* come la frazione $1/(10 \times 10^6)$ della parte di meridiano terrestre (tra il Polo Nord e l'Equatore) che passa per Parigi. Nel 1799 fu costruito un prototipo utilizzando un regolo di platino. Un secondo campione più preciso venne costruito nel 1889, con una sbarra con sezione a "X" di platino-iridio mantenuto alla temperatura di 0 °C (per evitare la dilatazione termica), che permetteva una precisione di 0.2 μm. Ne vennero costruite 30 copie, poi diffuse in vari istituti nazionali di metrologia del mondo. Dopo l'avvento delle tecniche che utilizzano la fisica atomica, nel 1960 il metro è stato ridefinito come pari a 1650763.73 volte la lunghezza d'onda nel vuoto della luce rosso-arancione emessa dal ^{86}Kr, definizione che premetteva una precisione fino a 0.01 μm. Infine, prima dell'ultima ridefinizione del 2019, nel 1983 si era deciso di definire il metro come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in 1/299792458 di secondo.

1.2.2 Misure di tempi

Sin dall'antichità, si è pensato di misurare il tempo che passa in termini di un *fenomeno periodico*, ossia un fenomeno che ritorna uguale a se stesso dopo un definito intervallo di tempo. In un anno la Terra compie una rivoluzione completa attorno al Sole: è stato il fenomeno periodico più utilizzato per misurare il trascorrere del tempo. Il *secondo* fu definito nel 1832 come la frazione 1/86400 del giorno solare medio, con una media calcolata in un anno.

Dopo il 1950, con l'avvento della tecnica degli orologi atomici (e quindi, usando delle periodicità di tipo atomico), si osservarono tuttavia discrepanze rispetto alla periodicità terrestre. Nel 1967 il secondo fu ridefinito come multiplo del periodo di oscillazione (9192631770 oscillazioni) di una particolare frequenza della radiazione elettromagnetica emessa dagli atomi di ^{133}Cs.

Ritornerò poco più avanti, Sez. 1.5 su alcuni aspetti fondamentali relativi alle operazioni di sincronizzazioni e sulla possibilità di misurare il tempo usando fenomeni non periodici, Sez. 1.4.4.

1.2.3 Misure di masse

La massa di un oggetto può essere stabilita riferendosi a masse di oggetti presi come campione. Nel 1795 la massa unitaria fu definita come la quantità di acqua al punto di fusione (0 °C) contenuta in un centimetro cubo. Questo corrispondeva a un grammo. Poiché gli scambi commerciali spesso riguardano oggetti ben più massivi, ed essendo un campione costituito di acqua scomodo e instabile, nel 1799 si scelse di riferirsi al volume di un litro di acqua nel suo stato di densità più stabile, cioè alla temperatura di 4 °C, alla quale la densità dell'acqua è massima. Questo corrispondeva all'oggetto con massa pari a 1 chilogrammo. Tuttavia, sorse l'esigenza di creare un campione basato su di un manufatto metallico per motivi di riproducibilità e inalterabilità, e venne realizzato un primo campione di platino con massa equivalente a un chilogrammo come sopra definito che rimase in vigore per novanta anni.

Dal 1889 il chilogrammo è stato definito come la massa di un nuovo manufatto costituito di platino-iridio a forma di cilindro circolare retto, con altezza pari al diametro di 39.17 mm. Il prototipo, che è conservato al Bureau International des Poids et Mésures a Sèvres, vicino a Parigi, è servito come campione sino all'ultima revisione del 2019. Sino a pochissimo tempo fa, il chilogrammo era l'unica unità di misura faceva riferimento a un oggetto materiale.

Problemi di "peso".

Per misurare la massa di un oggetto, si utilizza in generale uno strumento che viene chiamato bilancia (ne esistono di diversi tipi). Nel corso di Laboratorio apprenderete diverse procedure per determinare le masse usando bilance. L'esperienza empirica quotidiana ci mostra come la massa di un oggetto composto sia la somma delle masse dei costituenti. Se però guardiamo la struttura della materia, sappiamo che è costituita da un numero finito di oggetti fondamentali: gli atomi. A loro volta, gli atomi non sono indivisibili (come significa il loro nome). Sono costituiti da nuclei ed elettroni. A loro volta, i nuclei sono composti da protoni e neutroni. I quali, a loro volta, sono costituiti da quark. I quali, a loro volta . . . non lo sappiamo!

Dal livello atomico alle dimensioni degli oggetti più piccoli, però, sappiamo che la massa di un composto **non** è la somma delle masse dei costituenti. La massa di un nucleo non è la somma dei suoi componenti, protoni e neutroni. Ad esempio, il nucleo di carbonio più comune è fatto di $Z = 6$ protoni e $N = 6$ neutroni. La quantità $A = Z + N$ viene chiamato *numero di massa*; la carica elettrica è data dal numero Z [3]. La massa del nucleo di ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ è circa lo 0.6%

[3] Ogni nucleo X (l'iniziale del nome dell'elemento, ad esempio C per il carbonio) viene indicato simbolicamente con ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$.

inferiore alla somma delle masse di 6 protoni e 6 neutroni. Nella formazione del nucleo, quello che si perde in massa si acquista in energia, come scopriremo nel Cap. 8. Anche nel caso atomico si ha una situazione analoga; ma la perdita frazionaria di massa è inferiore 10^{-8} ed è difficilmente misurabile.

Sembra quindi facile: a livello subatomico quando si formano oggetti, c'è una perdita di massa e un guadagno di energia [4]. Tuttavia, se prendiamo il protone, sappiamo che è composto di altre particelle denominate *quark*. Nel modello semplice di struttura a quark del protone, esso è composto da tre quark ciascuno di massa [5] circa 2 MeV/c^2. Tuttavia, il protone non ha massa tre volte quella di un quark, ma quasi 500 volte maggiore! C'è un'altra particolarità per il protone. Delle particelle *elementari* come l'elettrone e il quark, non conosciamo le dimensioni: sappiamo solo che la loro massa (qualunque cosa significhi) è confinata in una regione di dimensioni incognite e inferiori a 10^{-16} cm. La massa del protone di 938 MeV/c^2 è invece entro una regione nota di circa 10^{-13} cm di raggio; qui dentro, oltre i tre costituenti di massa 2 MeV/c^2 ci deve essere qualcos'altro che fornisce la massa al protone (e al neutrone, per cui vale la stessa situazione).

Quindi, cos'è la massa? È una bella domanda, a cui solo da pochi anni cerchiamo di dare risposta in maniera accurata. Un tassello importante è avvenuto nel 2012, con la scoperta del *bosone di Higgs* (vedi nota di Sez. 8.1 per la definizione di bosone) al CERN. La scoperta ha confermato una teoria che è il primo tassello per la comprensione di cos'è la massa della materia, avventura che sicuramente coinvolgerà nel futuro qualcuno che sta ora leggendo queste righe.

Per ora, la cosa importante è poter affermare che le masse sappiamo **misurarle.**

1.3 Misurare grandezze fisiche

1.3.1 Misure dirette e indirette

La misura di una grandezza si dice **diretta** quando si confronta la grandezza misurata con l'unità di misura (campione) o suoi multipli o sottomultipli. Per

[4] D'altronde, $E = mc^2$ è l'unica formula della fisica universalmente nota, anche se molti non ne colgono il significato.

[5] **Unità pratiche.** Anche se noi useremo sempre in questo corso le unità del SI, è importante conoscere che ci sono, e sono universalmente usate, altre unità di misura che vengono chiamate *pratiche* Ad esempio, un astrofisico fatica a misurare le distanze in m; preferisce utilizzare il parsec (pc), che corrisponde a $\sim 3 \times 10^{16}$ m, o a 3 anni-luce (la distanza percorsa in 1 anno dalla luce). Analogamente, i fisici delle particelle non misurano le masse in kg, ma in unità di MeV/c^2. Se esistesse, la massa di una particella di 1 MeV/c^2 = 1.79×10^{-30} kg. L'elettrone ha massa di 0.511 MeV/c^2. Il protone di 938 MeV/c^2, il neutrone lo 0.14% in più del protone.

esempio, la determinazione della massa tramite una bilancia o la lunghezza di un tavolo mediante un regolo graduato sono misure dirette. È una misura diretta anche quella effettuata mediante l'uso di strumenti pre-tarati, come la misura della temperatura mediante un termometro o quella di una forza tramite un dinamometro (Cap. 4).

Si chiamano invece **misure indirette** quelle in cui non si misura la grandezza che interessa, ma altre che risultino a essa legate da una qualche relazione funzionale. La velocità di una autovettura può essere determinata in maniera diretta misurando quanto tempo impiega per percorrere un tratto di strada di lunghezza nota, oppure usando un autovelox. Questo sistema di basa sul fatto che, facendo rimbalzare della luce con lunghezza d'onda nota sparata da una sorgente laser su una autovettura, la luce che ritorna nel sensore ha cambiato leggermente la sua lunghezza d'onda in un modo che dipende dalla velocità dell'autovettura. La velocità dell'auto è quindi basata sulla legge fisica che descrive quello che si chiama *effetto Doppler*, che studierete nel corso di elettromagnetismo.

Il discrimine tra misure dirette e indirette è fragile: come potremmo immaginare uno strumento per effettuare la misura diretta della massa solare? O come misurare direttamente la velocità con cui il Sole ruota rispetto il centro della Galassia? In realtà, buona parte delle osservazioni che vanno al di fuori dagli intervalli delle dimensioni umane si basano su metodi indiretti. Questo è particolarmente vero nel campo del microcosmo (ossia, a livello atomico e dei suoi sub-costituenti) e a quello del macrocosmo (dell'astrofisica e della cosmologia).

Come possiamo essere confidenti che il risultato di una misura indiretta sia compatibile con una ipotetica misura diretta della grandezza interessata? Uno degli argomenti più forti a supporto del fatto che possiamo avere informazioni affidabili dalle misure indirette è che ci sono diversi metodi per misurare la stessa quantità. Se entro gli errori i diversi metodi danno un risultato consistente, siamo confidenti nella bontà del risultato e del fatto che le leggi che applichiamo siano "giuste". Viceversa, se noi abbiamo fiducia in una legge fisica, e qualcosa sembra essere sbagliato, generalmente qualcosa di interessante è nascosto, come mostrerò nella Sez. 11.10. In quel caso, la confidenza sulle leggi di Newton e sulla forza di gravità permise di scoprire un pianeta sconosciuto, Nettuno.

Questo libro serve anche a mostrare che possiamo avere confidenza nelle *osservazioni indirette*, a partire da quelle che si basano sulle leggi della meccanica.

1.3.2 Le scale di distanze

La fisica moderna tratta scale di distanze che vanno dalle dimensioni del femtometro (1 fm= 10^{-15} m) ai gigaparsec (1 Gpc= 3×10^{25} m). Questo significa che non è possibile avere un'unica procedura di misura di una distanza, attraverso il confronto con un *righello* campione. È necessario avere un qualche tipo di **scala di distanze**.

Andando verso le dimensioni più grandi di quelle terrestri, la scala delle distanze cosmiche è l'insieme dei metodi che gli astronomi usano per determinare le distanze dei corpi celesti. La scala è composta da gradini successivi, e ogni gradino è usato per determinare le distanze in quello successivo. Alcuni oggetti hanno distanze che possono essere misurate con tecniche diverse, permettendo una inter-calibrazione relativa. Tuttavia, più si risale la scala, più le incertezze si sommano e le distanze possono essere affette da errori.

Alla base della scala ci sono le osservazioni radar di alcuni pianeti prossimi, che permettono di determinare le distanze nell'ambito del sistema solare da cui si può risalire al parametri dell'orbita della Terra. Successivamente, si usano tecniche che usano l'orbita terrestre come base (la parallasse stellare). I passi successivi coinvolgono l'uso di candele standard, cioè oggetti di cui si pensa di conoscere con affidabilità la luminosità. Confrontando la luminosità propria dell'oggetto con quella apparente, se ne ricava la distanza. Questa tecnica si basa sulla dipendenza del flusso dall'inverso del quadrato della distanza, come descritto nella Sez. 10.3. In sequenza, queste candele standard sono: le variabili Cefeidi, la relazione di Tully-Fisher per le galassie e le supernovae di tipo Ia. Infine, vi è la misura dello spostamento verso il rosso (red-shift) degli oggetti estremamente lontani.

Dal punto di vista del microcosmo, le distanze non possono essere misurate comparando righelli a livelli sub-micrometrici. Le distanze atomiche (per esempio nei cristalli) vengono misurate attraverso fenomeni di interferenza e diffrazione usando raggi-X. Sotto le dimensioni atomiche, cinque ordini di grandezza inferiori, ci sono le dimensioni nucleare a livello dei femtometri. In questo caso, attraverso misure di deflessione di particelle di alta energia (che sostituiscono i raggi-X) si misura un parametro, denominato *sezione d'urto* che rappresenta una sorta di area geometrica del bersaglio. In maniera analoga, le dimensioni delle particelle elementari vengono stimate misurando la sezione d'urto.

1.3.3 Misure di masse fuori portata per le bilance

La massa di oggetti più grandi di quelli che possono essere trasportati da un camion non si può normalmente misurare con le bilance. In questo caso, si devono utilizzare le leggi fisiche che via via troveremo per determinare le masse. Non è possibile ovviamente mettere la Terra sopra una bilancia. La massa di oggetti molto grandi (una montagna) può essere determinata cercando di calcolarne il volume e stimando la densità. È stato finalmente possibile determinare la massa della Terra quando si è conosciuto come le masse interagiscono gravitazionalmente, e dopo aver misurato con un pendolo di torsione il valore della costante universale G che entra nella formula dell'interazione (Cap. 10). Il valore della massa del Sole si può determinare tramite la III legge di Keplero (Sez. 11.5), così come la stessa equazione permette di determinare la massa di buchi neri attorno ai quali ruotano degli oggetti luminosi stellari, Sez. 11.8.1.

Dal punto di vista sub-microscopico, il concetto di massa è fondamentale per la comprensione delle particelle. Le loro masse vengono determinate tramite una relazione relativistica che lega l'energia della particella con la sua quantità di moto. Le due grandezze verranno introdotte nei capitoli successivi, ed entrambe corrispondono a quantità che possono essere determinate tramite rivelatori di particelle.

1.3.4 Dai pico ai tera

Spesso, le quantità (fondamentali o derivate) usate nel SI sono troppo piccole o troppo grandi per esprimere un risultato. Anche se si possono agevolmente usare le potenze di 10, convenzionalmente vi è la prassi di esprimere il risultato in termini di multipli e sottomultipli della grandezza pari a mille. Il prototipo è il kg, che significa 1000 g. Invece di scrivere 1000, si aggiunge un "k" all'unità di misura.

I fattori di scala utilizzati sono indicati nella Tab. 1.2. Vengono utilizzati anche per grandezze che non riguardano la fisica. Si noti che i simboli dei fattori moltiplicativi sono tutti espressi con le lettere maiuscole (tranne il kilo). Un Tbyte rappresenta quindi un dispositivo che ha una capacità di memoria per il vostro computer di 10^{12} byte. I simboli dei fattori che invece rappresentano sottomultipli sono indicati con lettere minuscole. Un milionesimo di secondo si indica μs.

Esponente	Prefisso	Simbolo	Esponente	Prefisso	Simbolo
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a

Tabella 1.2. Fattori multipli e sottomultipli delle unità di misura grandezze fisiche.

1.4 Il concetto di spazio e tempo

1.4.1 Lo spazio Euclideo

Lo **spazio euclideo** è uno spazio in cui valgono gli assiomi e i postulati della geometria euclidea. In particolare:

- lo spazio ha tre "dimensioni";

- due rette che hanno un punto in comune definiscono un piano nello spazio;
- la somma degli angoli interni di un triangolo è esattamente π rad (o $180°$);
- vale il teorema di Pitagora.

Nella seconda metà del 1800, iniziano a svilupparsi geometrie non-euclidee, costruite negando o non accettando alcuni postulati euclidei. In alcune di queste geometrie, ad esempio, la somma degli angoli interni di un triangolo è $> 180°$, oppure $< 180°$, vedi Fig. 1.2. Tutte le geometrie matematiche sono internamente coerenti, ma ovviamente solo una tra le infinite possibili soluzioni è quella adottata dalla Natura. Nel caso la Natura abbia scelto la geometria piana Euclidea, ad esempio, la somma degli angoli interni di un triangolo deve essere $= 180°$.

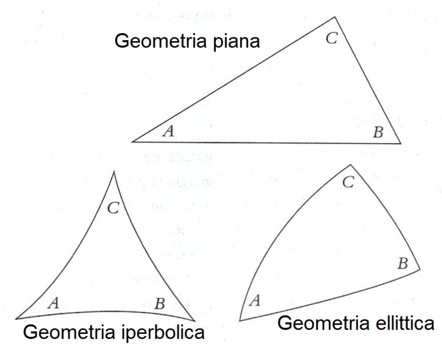

Figura 1.2. Relazione tra la somma degli angoli interni di un triangolo nel caso della geometria piana euclidea e di quelle non euclidee. La deformazione dei triangoli è tale perché lo spazio è curvato.

La questione, dal punto di vista fisico, è di natura sperimentale, e si può tradurre nella domanda: **la struttura dell'Universo in cui viviamo è quella di uno spazio Euclideo oppure di uno spazio non Euclideo?** Ovviamente, nel secondo caso, si vorrà conoscere anche il *parametro di curvatura*, valore legato alla somma degli angoli interni di un triangolo. Quando studierete la relatività generale di Einstein, troverete che la geometria dello spazio dipende appunto da un parametro di curvatura. Il parametro di curvatura k consente di determinare la tipologia di universo e la sua geometria: per $k = 0$, si ottiene un universo piatto (geometria euclidea). La determinazione di questo parametro è di natura sperimentale. Negli ultimi 20-30, sono stati realizzati esperimenti per la determinazione della curvatura dell'Universo, che studierete con la *cosmologia osservativa.*

La risposta sperimentale attuale è che l'Universo visibile è descrivibile dai parametri della geometria Euclidea non solo a scala locale (Sistema Solare, stelle vicine, Galassia) ma anche su scale cosmologiche.

1.4.2 Spazio e tempo Newtoniano

Il fatto che lo spazio sia Euclideo permette l'introduzione e l'uso di una quantità matematica fondamentale in fisica: il vettore. Questo sarà l'argomento del capitolo successivo. Un vettore è lo strumento più appropriato per descrivere la posizione di un oggetto nello spazio tridimensionale Euclideo.

Come vedremo a partire dal Cap. 4, il testo di Newton del 1687 rappresenta il caposaldo della meccanica classica. Newton deve utilizzare, per descrivere i suoi nuovi concetti, le nozioni di spazio e tempo. Egli ci espone nel suo libro la sua visione del tempo, dello spazio e del moto assoluti, ossia *senza relazione ad alcunché di esterno*. Riporto, traducendo in italiano dal latino, quello che Newton scrive sul **tempo**.

I. Il tempo assoluto, vero, matematico, in sé e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente, e con altro nome è chiamato durata; quello relativo, apparente e volgare, è una misura (accurata oppure approssimativa) sensibile ed esterna della durata per mezzo del moto, che comunemente viene impiegata al posto del vero tempo: tali sono l'ora, il giorno, il mese, l'anno.

In maniera analoga, vi è la definizione dello **spazio**.

II. Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale ed immobile; lo spazio relativo è una dimensione mobile o misura dello spazio assoluto, che i nostri sensi definiscono in relazione alla sua posizione rispetto ai corpi.

Lo spazio e il tempo Newtoniano sono, dunque, **assoluti**. L'universo è uno spazio sostanziale, dotato di realtà, un contenitore vuoto, indifferente alla materia in esso contenuta e all'osservatore che in esso analizza i movimenti della materia. Analogamente, il tempo assoluto indica un fluire eterno, sciolto dallo spazio ed esistente indipendentemente dalla sua misura volgare in ore, giorni e anni.

La fisica moderna, con la relatività ristretta prima e quella generale poi, stravolgerà completamente questa visione. Tuttavia, nell'ambito della fisica all'interno del sistema solare che affronteremo, la visione Newtoniana rappresenta una ipotesi di lavoro che possiamo utilizzare, fintanto che le velocità degli oggetti rimangono lontane dalla velocità della luce. Inoltre, potremmo supporre che in questa enorme "scatola" che rappresenta lo spazio newtoniano, ciascun punto (o almeno, una griglia sufficientemente fitta di punti) sia sincronizzato. Oggi questo è operativamente possibile tramite dispositivi GPS o analoghi, Sez. 1.5.

1.4.3 Spazio-tempo quadrimensionale (*)

Come abbiamo visto, nella visione Newtoniana lo spazio tridimensionale è ben distinto dal tempo ed entrambi sono considerati assoluti. Non è più così nella fisica moderna, e conviene qui brevemente anticipare alcuni fatti presentati nei capitoli successivi e nei corsi successivi, a partire da quello di elettromagnetismo. Verso la fine del 1800, infatti, le previsioni della teoria dell'elettromagnetismo di J.C. Maxwell venivano confermate con una osservazione sperimentale di portata fondamentale: la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche (la *velocità della luce, c*) era la stessa in tutti i sistemi di riferimento, indipendentemente dalla velocità con cui il sistema di riferimento si muove.

Questa osservazione falsifica quelle che si chiamano le trasformazioni di Galilei (che incontreremo nella Sez. 5.1). Nello spazio-tempo di Galilei e Newton, la distanza fra due oggetti nello spazio e fra due eventi nel tempo è una quantità assoluta, che non dipende dal sistema di riferimento inerziale in cui si effettua la misura: si veda la discussione nella Sez. 4.11. Questo non è verificato sperimentalmente se sistemi di riferimento in cui si effettua la misura sono in moto relativo con velocità prossima alla velocità della luce. La conclusione (sia teorica, che sperimentale) è che osservatori in moto relativo trovano diverse distanze tra due oggetti come osservati nei rispettivi sistemi di riferimento, e due eventi simultanei in un sistema di riferimento non lo sono nell'altro.

All'inizio del 1900, divenne inevitabile considerare che tra spazio e tempo vi fosse un legame indissolubile e che fosse necessario abbandonare il concetto di un loro carattere assoluto. Tali considerazioni vennero formulate in maniera indipendente da lavori di J.H. Poincaré, H.A. Lorentz, nella relatività ristretta di A. Einstein (1905) e nel lavoro del matematico H. Minkowski.

La struttura matematica necessaria per descrivere lo spazio-tempo come strettamente collegati in una struttura quadri-dimensionale (con la quarta dimensione data da ct, ossia il tempo moltiplicato per la velocità della luce, che dimensionalmente è una lunghezza) è quella iniziata proprio da Minkowski, da cui convenzionalmente prende il nome. La novità sta nel "mescolamento" fra le tre dimensioni spaziali e quella temporale, la cui "separazione" varia a seconda del sistema di riferimento in cui si trova l'osservatore. Il formalismo matematico dovuto a Minkowski fornisce un semplice modello "locale", utilissimo per considerare quei fenomeni fisici che prevedono una velocità finita e costante per la luce, come quelli descritti dalla relatività ristretta. Le trasformazioni di Galilei per passare da un sistema di riferimento inerziale all'altro devono essere rimpiazzate da quelle di Lorentz, come discusso in Sez. 5.7.

Nel giro di pochi anni, però, Einstein nella sua teoria della relatività generale (1915) si rese conto che lo spazio-tempo di Minkowski non era utilizzabile per descrivere l'Universo nel suo complesso. Nella relatività generale, quello di Minkowski è solo un modello che approssima localmente lo spazio-tempo, che risulta "distorto" dalla massa. Entra qui in gioco una seconda osservazione empirica fondamentale: l'equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale, che incontreremo nella Sez. 10.4.

La relatività generale descrive l'interazione gravitazionale non più come azione a distanza fra corpi massivi della teoria newtoniana (come mostrato nel Cap. 10), ma come effetto di una perturbazione della geometria dello spazio-tempo dovuta alla distribuzione e al flusso di massa, energia e quantità di moto. I sistemi di riferimento inerziali (Cap. 5) saranno identificati con le coordinate relative agli osservatori in caduta libera, che si muovono nella geometria dello spazio-tempo lungo traiettorie *geodetiche*, ossia lungo la curva più breve che congiunge due punti dello spazio. La forza peso risulta in questo modo una *forza apparente* (Cap. 5) osservata nei riferimenti non inerziali.

Nella visione della fisica moderna, quindi, la distinzione che viene fatta tra *cinematica* (Cap. 3) e *dinamica* (Cap. 4) ha meno senso che nella fisica classica discussa nel seguito del libro. Tuttavia, la visione moderna è impossibile da comprendere senza una matura conoscenza dei concetti della fisica newtoniana.

1.4.4 Tempo cosmologico (*)

Molti fisici (partendo da Newton, come abbiamo visto) si sono cimentati nel tentativo di spiegare cosa sia il tempo. Alcuni hanno scritto libri sul tempo così confusi ma così ben confezionati, conditi con profumi di filosofiche orientali e senza l'ausilio di formule matematiche, che hanno avuto enorme successo presso il grande pubblico. La misura di un intervallo di tempo è una procedura chiara a tutti. Prevede uno *start*, uno *stop* e uno strumento che misura il trascorrere del tempo. È quello che Newton chiama *la durata* di un evento, Sez. 1.4.

Se esiste e cosa sia l'equivalente Newtoniano di *tempo assoluto* è problema molto più arduo. Sebbene spazio e tempo siano indissolubilmente legati, e ad esempio due osservatori in moto relativo possano misurare diverse durate di un evento osservabile, noi viviamo in un unico Universo e la storia cosmica può essere univocamente definita. La teoria della relatività generale permette di definire un **tempo cosmologico**, tempo misurato da un osservatore solidale con il sistema di *coordinate comoventi.* Una trattazione adeguata non può prescindere da conoscenze di fisica relativistica, che acquisirete in corsi più avanzati.

Cerco di spiegarlo nel modo più semplice: le leggi della fisica possono essere scritte e sono valide in un qualunque sistema di coordinate. Questo è valido sia in fisica classica (Cap. 9) che in fisica relativistica. Tuttavia, vi sono sistemi di coordinate in cui la matematica coinvolta risulta più semplice. La cosmologia osservativa ha sviluppato un paradigma, la **teoria del Big Bang** suffragata da una enorme mole di dati sperimentali, Fig. 1.3. Per descrivere l'evoluzione dell'Universo, la scelta più naturale è quella delle coordinate comoventi: sono quelle di un osservatore che "si lascia trasportare" dall'espansione dell'Universo, un **osservatore comovente**. Tale osservatore è caratterizzato dal fatto di percepire l'Universo (e in particolare la sua *radiazione cosmica di fondo*) come isotropo. La radiazione fossile di fondo, osservata per la prima volta nel 1965 da Penzias e Wilson, è una radiazione di microonde osservabile che contiene informazioni su come era la struttura dell'Universo circa 380000 anni dopo il Big Bang. La radiazione di fondo misurata da ogni altro osservatore, non in quiete rispetto alle coordinate comoventi, risulterà spostata verso il blu in alcune regioni del cielo e verso il rosso in altre, in relazione alla direzione e intensità della velocità dell'osservatore.

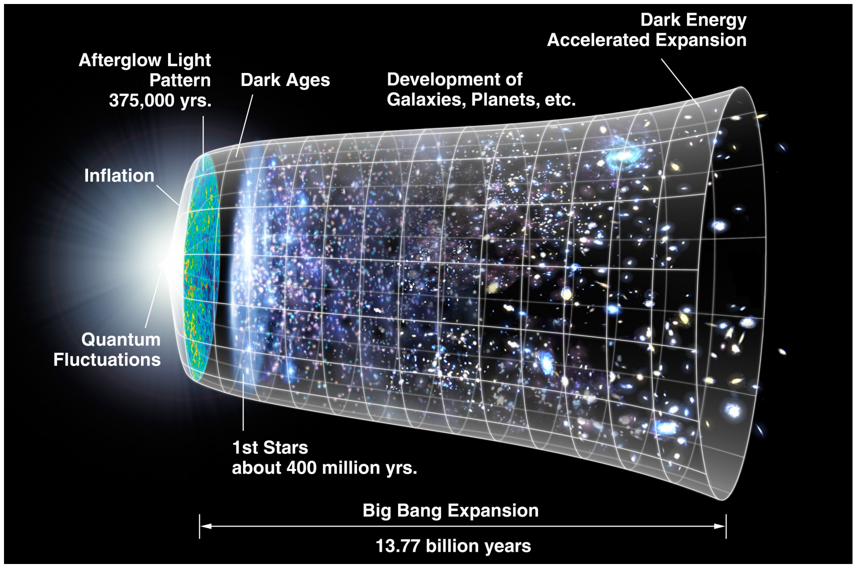

Figura 1.3. Schematizzazione dell'espansione dell'Universo, iniziata 13.8 miliardi di anni fa col Big Bang, al variare del tempo cosmologico. La variazione di curvatura rappresenta l'accelerazione dell'espansione, iniziata a metà dell'espansione e tuttora in corso. Crediti: NASA/WMAP Science Team

Il tempo misurato da un osservatore comovente è detto **tempo comovente o tempo cosmologico**; l'istante zero è ovviamente quello del Big Bang e il valore del tempo cosmologico coincide con l'età dell'Universo. Gli eventi che sono avvenuti nell'Universo possono essere univocamente posizionati ad un certo tempo cosmologico. Dunque, è possibile misurare in qualche modo questo tempo. In base alle più precise stime ottenute dal telescopio-sonda spaziale Planck Surveyor dell'Agenzia Spaziale Europea, l'Universo si è evoluto dal Big Bang ed ha un'età calcolata di 13.798 ± 0.037 miliardi di anni.

1.5 Sincronizzazione e disseminazione del tempo

Un aspetto fondamentale in fisica è quello della **sincronizzazione** degli orologi e della **disseminazione** dei tempi. La sincronizzazione temporale è la capacità di condividere lo stesso tempo (entro un errore predefinito) da parte di sistemi distribuiti. L'operazione che porta il segnale distribuito in tutte le stazioni si chiama disseminazione del segnale. Sino a venti anni fa, questo richiedeva operazioni complicatissime (stendere centinaia o migliaia di km di cavi!). Oggi è possibile sincronizzare con un orologio atomico gli orologi dei computer utilizzando la rete Internet. Lo scarto tipico (cioè, la differenza di tempo registrata da due orologi diversi) è di alcune decine di millisecondi.

Gli orologi atomici hanno oggi un ruolo chiave nella tecnologia: i loro segnali orari sono quelli che vengono utilizzati dai ricevitori GPS per tracciare la posizione. Il GPS (*Global Positioning System*) è, come sicuramente sapete, il sistema di navigazione satellitare gestito degli Stati Uniti, liberamente accessibile da chiunque sia dotato di un ricevitore GPS. Attraverso una rete dedicata di satelliti artificiali in orbita, il GPS fornisce a qualsiasi terminale mobile o ricevitore GPS informazioni sulle sue coordinate geografiche e sul suo orario in ogni condizione meteorologica, ovunque sulla superficie della Terra dove vi sia un contatto privo di ostacoli con almeno quattro satelliti del sistema. La localizzazione avviene tramite la trasmissione di un segnale radio da parte di ciascun satellite e l'elaborazione dei segnali ricevuti da parte del ricevitore.

Il suo grado attuale di accuratezza è dell'ordine di pochi metri [6], in dipendenza (tra l'altro) dalle condizioni meteorologiche, dalla disponibilità e dalla posizione dei satelliti rispetto al ricevitore, dalla qualità e dal tipo di ricevitore. Il sistema GPS è la dimostrazione più efficace della *teoria della relatività generale* che studierete negli anni successivi: solo con le correzioni legate agli effetti gravitazionali il GPS riesce ad arrivare alle precisioni menzionate. In generale, un ricevitore GPS dispone sempre di un'indicazione oraria precisa dell'ordine di pochi ns, che è inoltre indipendente dalla posizione e utilizzabile anche in movimento.

Un esempio di applicazione in fisica della sincronizzazione temporale di diverse parti di un apparato è il Pierre Auger Observatory (PAO), Fig. 1.4. Si tratta di un enorme sistema distribuito di rivelatori situato in Argentina che consiste di 1600 stazioni sparse su circa 3000 km^2. Ogni stazione dista dalle altre circa 1.5 km. Studia l'arrivo sulla terra di sciami di particelle indotte dai cosiddetti *raggi cosmici*, principalmente protoni e nuclei più pesanti accelerati da oggetti astrofisici (resti di supernovae, nuclei di galassie attive, etc.). Il segnale fisico è caratterizzato dalla quasi *contemporanea* accensione di una decina di stazioni. La contemporaneità richiede che ciascuna stazione abbia la possibilità di registrare l'arrivo di una parte dello sciame con un orologio che sia sincronizzato (entro pochi ns) con quello di tutte le altre stazioni per poter ricostruire il segnale. Come si vede dalla foto a destra, ciascuna delle 1600 stazioni è attrezzata con una antenna GPS, oltre a dei pannelli solari e batterie per l'alimentazione elettrica dell'elettronica necessaria per il funzionamento del rivelatore.

Per ottenere in modo affidabile una sincronizzazione temporale inferiore al nanosecondo nei rivelatori distribuiti si deve ricorrere a configurazioni che utilizzano cavi di collegamento. Negli ultimi anni sono state sviluppate soluzioni open-source come il protocollo denominato *White Rabbit*, utilizzato da

---

[6] Per motivi militari facilmente intuibili, la precisione spaziale ΔL del GPS è limitata a circa 3-5 m. Poiché la luce viaggia a c=30 cm/ns, la risoluzione temporale corrispondente è $\Delta t = \Delta L/c \sim 10$ ns. In realtà il GPS è intrinsecamente più preciso, fino ad arrivare a 1-3 ns.

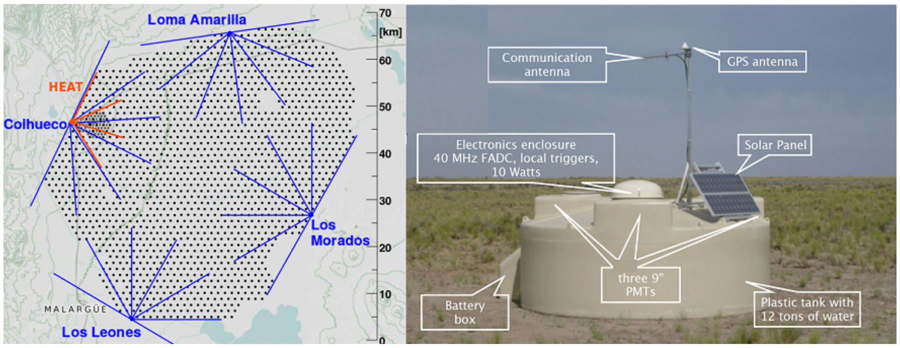

Figura 1.4. Il Pierre Auger Observatory (PAO), esperimento per la misura dei raggi cosmici delle energie più elevate, realizzato da una collaborazione internazionale in Argentina. Nel disegno a sinistra, ciascun punto indica uno dei 1600 rivelatori di superficie che richiedono una sincronizzazione temporale. I quattro punti con nomi in azzurro si riferiscono ad altri rivelatori sempre usati per la rivelazione di raggi cosmici e sincronizzati con gli altri. La scala di distanza indica che l'estensione è di circa 70 km. A destra, uno di questi 1600 rivelatori. Si notino i pannelli solari per l'alimentazione, e l'antenna GPS per ricevere i segnali temporali e trasmettere i dati alla stazione centrale (Cortesia della Collaborazione Pierre Auger).

un'ampia comunità, come ad esempio quella degli esperimenti al CERN. Tale soluzione è utilizzata anche per sincronizzare tra loro le migliaia di moduli che fanno parte del telescopio per neutrini KM3NeT, in costruzione nel mar Mediterraneo, Fig. 1.5. Sott'acqua, il GPS non arriva e necessariamente si fa uso di sistemi cablati, necessari anche per trasmettere l'alimentazione elettrica e ricevere i dati acquisiti.

1.6 Misure di tempi senza fenomeni periodici (*)

Una delle tecniche per datare nel tempo cosmologico gli eventi è quella che utilizza decadimenti radioattivi. La radioattività è un fenomeno naturale che coinvolge nuclei e particelle. Riguardo ai nuclei, ne parlerò in maniera più diffusa nel Cap. 8.

Quando vi è una situazione nella storia cosmologica dell'Universo che, in qualche momento dopo in Big Bang, produce un evento, questo evento può causare come effetto secondario la produzione di nuclei (o particelle) instabili, che potranno trasformarsi in qualcos'altro in una epoca successiva. Questa trasformazione è quella che chiamiamo **decadimento radioattivo**. Quanto più tardi avverrà il decadimento di un particolare nucleo, dopo la sua produzione, nessuno lo sa o lo può sapere: è un fenomeno che avviene su base statistica. È esattamente quello che avviene quando nasce un cucciolo:

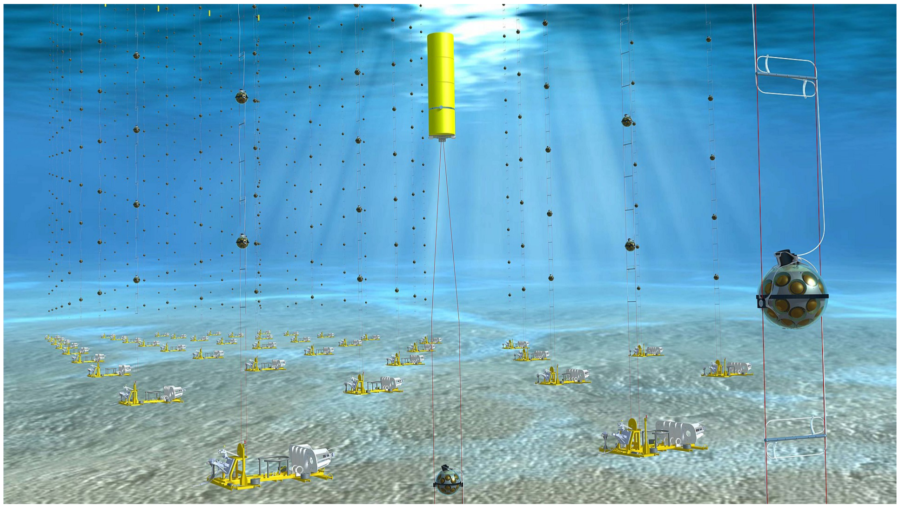

Figura 1.5. Disegno illustrativo del rivelatore KM3NeT in costruzione nel mar Mediterraneo. Quando completo questo telescopio per neutrini avrà 230 stringhe di circa 1 km di altezza ancorate a 3500 m di profondità. Ciascuna stringa è composta da 18 sfere di 43 cm di diametro (una è visibile in primo piano), distanziata di 90 m dalle altre. In ciascuna sfera, sono contenuti 31 fotomoltiplicatori, dispositivi capaci di rivelare la luce prodotta dalle particelle originate dall'interazione di neutrini. Ciascun dispositivo deve essere sincronizzato con gli altri con la precisione di 1 ns se si vuole ricostruire con accuratezza la traccia del neutrino. (Cortesia della Collaborazione KM3NeT).

all'atto della nascita, noi sappiamo che morirà. Ma nessuno può sapere quando il processo avverrà. Sappiamo che se il neonato è un cucciolo di uomo[7], oppure di elefante, la sua aspettativa di vita (altrimenti detta *vita media*) sarà circa 75 anni. Se si tratta di un cucciolo di cane, la vita media sarà circa 12 anni.

1.6.1 La legge del decadimento radioattivo

È possibile dedurre una legge matematica che descriva la situazione. Considero un campione con un certo numero di elementi, N_0, di una qualsiasi sostanza radioattiva (ad esempio, nuclei di radio) a certo tempo iniziale, $t = 0$. Se circondo il campione sotto osservazione con opportuni strumenti di misura, posso rilevare che un certo numero di elettroni vengono emessi in un certo intervallo di tempo Δt. Conosco che ogni emissione di un elettrone comporta il decadimento di un nucleo. In base alle osservazioni, trovo **empiricamente**

[7] Purché sia nato in una nazione del mondo occidentale, in una famiglia mediamente agiata.

una relazione tra il numero di nuclei $N(t)$ presenti ad un certo istante di tempo t e quelli presenti in un istante successivo $N(t+\Delta t)$:

$$N(t+\Delta t) = N(t) - \lambda N(t)\Delta t \ . \tag{1.1}$$

La relazione esprime questo fatto osservativo: il numero di nuclei è diminuito (il segno $-$) di una quantità che dipende dal tempo Δt di osservazione considerato, dal numero di nuclei $N(t)$ presenti prima dell'intervallo di tempo trascorso e da una costante, λ, che dipende solo dal tipo di nucleo prescelto. Dovunque ripetessimo questa osservazione, in qualunque circostanza (luogo diverso, in pianura, in montagna o sottoterra, a differente pressione, temperatura, forze esterne applicate, ...) troveremmo sempre la stessa relazione 1.1 con lo stesso valore di λ per lo ciascun elemento radioattivo considerato. [8] La 1.1 può anche essere trascritta come:

$$\Delta N = [N(t+\Delta t) - N(t)] = -\lambda N(t)\Delta t \tag{1.2}$$

ossia, anche come:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N(t) \ . \tag{1.3}$$

La relazione appena trovata vale anche se facciamo tendere a zero l'intervallo di tempo, ossia se scriviamo:

$$\frac{dN}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} \quad \longrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda N(t) \ . \tag{1.4}$$

L'equazione appena scritta si chiama **equazione differenziale**. Esprime il seguente problema: quale è la funzione $N(t)$ la cui derivata (parte di sinistra dell'equazione) corrisponde alla funzione stessa, moltiplicata per una costante negativa (parte di destra)? Utilizzando un tabulato delle derivate di funzioni notevoli, si vede immediatamente che la funzione esponenziale con esponente negativo ha tale proprietà, ossia la funzione:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{1.5}$$

è proprio la funzione che soddisfa la 1.4. Nella Sez. 4.8.2 vedremo un modo matematico più elaborato per risolvere lo stesso problema, chiamato *di separazione delle variabili*. Per ora, se non conoscete le derivate delle funzioni semplici, consultate `https://it.wikipedia.org/wiki/Regole_di_derivazione` e fate la verifica, oppure fidatevi. In realtà, qualsiasi altra costante moltiplicativa al posto di N_0 soddisferebbe l'equazione. Tuttavia, solo il valore N_0 garantisce che il numero di nuclei all'istante iniziale $t = 0$, sia proprio quello che avevamo all'inizio. Come vedremo nella sezione successiva, la costante λ non può che

[8] Chi studierà fisica dei nuclei e la teoria di Fermi delle interazioni deboli che spiega il decadimento radioattivo, vedrà come correlare il valore di λ con le proprietà dei nuclei.

essere che una grandezza che ha dimensioni $[\mathrm{T}^{-1}]$. I metodi statistici (che affronterete nel corso di Laboratorio di Fisica) ci garantiranno che la grandezza τ con le dimensioni di un tempo pari a

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \tag{1.6}$$

è proprio quella che noi chiamiamo la **vita media**. Le vite medie dei nuclei possono andare da μs (ve ne sono anche di molto più piccole, ma non riusciamo nemmeno a misurarle) a miliardi di anni. L'isotopo più comune dell'uranio ($^{238}_{92}\mathrm{U}$) ha una vita media $\tau = 6.5 \times 10^9$ anni, confrontabile con l'età dell'Universo.

Se il valore di τ (o λ) è determinato, e riusciamo ad avere informazioni sul valore a $t = 0$ del numero N_0, è possibile determinare quanto tempo è trascorso dall'istante $t = 0$ e datare nel tempo l'evento misurando quanti nuclei $N(t^*)$ sono rimasti a un certo tempo $t^* > 0$. Questo è anche possibile se conosciamo il rapporto iniziale tra i valori di N_0 di due elementi differenti, con vite medie differenti. Per capire come, si segua l'esempio sotto riportato.

1.6.2 Datazione col radiocarbonio.

Il carbonio 12 (ossia, $^{12}_{6}\mathrm{C}$) è quello più abbondante in natura e stabile, ovvero non decade mai. In atmosfera terrestre è però presente un altro isotopo, il carbonio 14, $^{14}_{6}\mathrm{C}$. Questo isotopo differisce dal precedente (come vedete dal numero di massa) perché ha nel nucleo due neutroni in più. Per le reazioni chimiche, a cui importa solo il numero di elettroni nell'atomo, i due carboni sono indistinguibili. Sono indistinguibili anche per le reazioni chimiche che coinvolgono la crescita e il metabolismo di piante che crescono, di pecore che mangiano l'erba, di carnivori che mangiano le pecore, o che ne utilizzino la lana. Il $^{14}_{6}\mathrm{C}$ ha una vita media $\tau = 1/\lambda = 8270$ anni. Si forma in atmosfera per il bombardamento di raggi cosmici (quelli che studia il Pierre Auger Observatory). Nei raggi cosmici in atmosfera sono presenti neutroni [9], che possono essere assorbiti da nuclei stabili e formare il $^{14}_{6}\mathrm{C}$. Il rapporto tra le quantità dei due isotopi presenti in atmosfera e sul suolo è stabile ed è pari a

$$R = \frac{^{14}_{6}C}{^{12}_{6}C} = 1.17 \times 10^{-12} \ . \tag{1.7}$$

Questo stesso rapporto è rimasto immutato anche in epoche lontane del passato (almeno decine di milioni di anni). Proviamo a esercitarci: se estraiamo 1

[9] I neutroni liberi non sono normalmente disponibili, non essendo particelle stabili. Poichè il neutrone ha massa maggiore del protone, un neutrone isolato tende a decadere in un protone ed altre particelle, come vedremo in Sez. 8.8.5, con una vita media di circa 15 minuti. I neutroni legati nei nuclei hanno una massa effettiva differente e non hanno energia sufficiente per decadere.

grammo di carbonio naturale ottenuto da una combustione appena avvenuta di vegetali, quanti decadimenti radioattivi per minuto posso conteggiare?

Usando le conoscenze di chimica, il numero di atomi (e quindi, di nuclei) presenti in un grammo di materia è pari a N_A/A dove $N_A = 6.023 \times 10^{23}$ è il numero di Avogadro e $A = 12$ è il numero di massa. Quindi, 1 g di carbonio è composto da

$$\frac{N_A}{A} = 5.0 \times 10^{22} \text{ nuclei} \,, \tag{1.8}$$

di cui

$$N^{14} = R \times \frac{N_A}{A} = 1.17\ 10^{-12} \times 5.0\ 10^{22} = 5.8 \times 10^{10} \text{ nuclei} \tag{1.9}$$

sono dell'isotopo 14. Il numero di decadimenti per intervallo di tempo è dato dalla 1.3, ossia:

$$\frac{|\Delta N^{14}|}{\Delta t} = \lambda N^{14} = \frac{1}{8270 \times 365 \times 24 \times 60} 5.8 \times 10^{10} = 14 \text{ decay/min} \,. \tag{1.10}$$

Nella relazione, $365 \times 24 \times 60$ rappresenta il numero di minuti presenti in un anno. Questa quantità (che misura i decadimenti per intervallo di tempo) prende il nome di **attività**. Quindi, un contatore perfettamente efficiente per misurare elettroni dal decadimento radioattivo che circondi un quantitativo pari a 1 g di carbonio appena estratto dalla combustione di vegetali misurerebbe circa 14 decadimenti al minuto a causa della piccolissima frazione di un isotopo radioattivo.

Ora, si vuole stabilire l'epoca di un pezzo di carbone estratto da una antica fornace etrusca, che mostra una attività di 10.0 conteggi al minuto. Cosa è successo per produrre questa variazione di attività? Per un organismo in vita, con un metabolismo in atto con l'ambiente esterno, il carbonio che ingloba (crescendo, se è un vegetale, mangiando, se è un erbivoro o carnivoro) si mantiene esattamente nel rapporto dato da eq. 1.7. Appena lo scambio con l'esterno cessa (il vegetale viene tagliato, l'animale muore), non vi è più ricambio. I nuclei presenti di ${}^{12}_{6}$C rimangono immutati, mentre il ${}^{14}_{6}$C comincia a decadere [10], trasformandosi in altro elemento (azoto, in questo caso). Quindi, il rapporto R di eq. 1.7 diminuisce: il numeratore cala nel tempo con la legge 1.5, mentre il denominatore resta invariato. Con queste informazioni, il problema di fisica è finito e inizia solo il dettaglio matematico necessario per determinare quanto vecchio è il pezzo di carbone. Otterrete che il campione studiato è stato prodotto nella fornace etrusca 2350 anni fa (vedere Esercizio 1.1).

La datazione col ${}^{14}_{6}$C può ricostruire l'età di un oggetto, cioè l'epoca in cui l'oggetto è stato formato. Tuttavia, poiché la sua vita media τ è poco più di 8000 anni, non si riesce a datare oggetti più vecchi di 100000 anni. In generale, è difficoltoso datare oggetti più vecchi di 10τ, in quanto il numero di nuclei

[10] Il processo di decadimento di questo isotopo viene illustrato nella Sez. 8.8.5.

che decadono è diminuito di un fattore $e^{-10} = 5 \times 10^{-5}$. Occorre cambiare elemento radioattivo, scegliendone uno a più lunga vita media.

Così è stato fatto per datare la Terra e il Sistema Solare con tecniche analoghe a quelle menzionate. La Terra ha una età di 4.54 miliardi di anni (Gy), con una precisione di circa 0.05 Gy. Il Sole ha una età di circa 4.6 Gy. Complessivamente, l'età del Sistema Solare è all'incirca 1/3 dell'età dell'Universo.

Per ottenere questo risultato, sono state studiate le età di vari corpi presenti all'interno del Sistema Solare, e analizzati dei particolari minerali chiamati zirconi. Questi minerali sono a base di silice, ossigeno e zirconio e si possono osservare principalmente in rocce magmatiche. In determinate circostanze, si possono trovare in contesti geologici stabili e conservare pressoché inalterati per miliardi di anni. Gli zirconi spesso contengono piccole quantità di piombo. Il nucleo del piombo rappresenta l'elemento stabile alla fine di una lunga catena di processi di decadimento che partono dell'uranio $^{238}_{92}U$, che ha vita media di oltre 5 Gy. Il rapporto tra le quantità relative di tutti gli elementi presenti della catena (dall'uranio che ha Z=92, al Pb con Z=82) permette di datare con precisione il minerale, e quindi l'epoca della sua formazione corrispondente a quella del pianeta che lo contiene.

1.7 Analisi Dimensionale

L'analisi dimensionale è la scomposizione in grandezze fondamentali delle grandezze fisiche nell'ambito delle formule che ne stabiliscono le relazioni. L'analisi dimensionale è una procedura utilizzata in fisica per verificare il corretto uso delle unità di misura nelle formule e nelle equazioni, e serve a controllare la coerenza del risultato rispetto alle grandezze utilizzate nei calcoli. A mio parere, la capacità di effettuare l'analisi dimensionale, di produrre stime per ordini di grandezza e l'abilità nell'interpretare i grafici sono le tre principali caratteristiche che distinguono i fisici da ogni altra figura professionale. [11]

L'analisi dimensionale può essere utilizzata come controllo di coerenza nei vari passaggi che portano a una formula o nella verifica dell'espressione finale, utilizzando il fatto che le dimensioni fisiche (quelle definite nella seconda colonna di Tab. 1.1 entro il simbolo "[ ]") possono essere trattate come grandezze algebriche. Queste grandezze possono essere **sommate o sottratte fra loro solamente se hanno le stesse dimensioni**. Inoltre, i **termini di ciascun membro di un'equazione debbono avere le stesse dimensioni**. L'analisi dimensionale può essere utilizzata come valido ausilio per giudicare a priori un'espressione, poiché la condizione necessaria (ma non sufficiente) perché una

[11] Durante le lezioni, scrivendo sulla lavagna l'analisi dimensionale viene frequentemente utilizzata. In un testo scritto questo può essere evitato, ma suggerisco sempre allo studente di esercitarsi nell'analisi dimensionale delle equazioni più complesse.

relazione di uguaglianza sia corretta è che le dimensioni delle grandezze fisiche in ambo i membri dell'equazione siano le stesse.

Non è semplice mostrare le potenzialità dell'analisi dimensionale nel primo capitolo di un libro di fisica, quando sono state introdotte solo poche formule! Per esempio, l'analisi dimensionale serve per capire le unità di misura di una grandezza introdotta. Nella prima equazione presentata in questo libro, eq. 1.1 ho introdotto tre grandezze: N è adimensionale (è il numero di un qualche tipo di oggetti), Δt è un intervallo di tempo. Quindi, necessariamente perchè l'equazione sia corretta, la grandezza sconosciuta λ deve avere dimensioni di un inverso del tempo, ossia $[T^{-1}]$.

Generalmente, nel caso di formule non complicate l'analisi dimensionale può essere svolta a mente. Ad esempio, io ricordo che il periodo di oscillazione di un pendolo (Cap. 4) dipende dal rapporto tra l'accelerazione di gravità g, che è una accelerazione (Cap. 3) e quindi ha dimensioni $[LT^{-2}]$, e la lunghezza ℓ del filo, che ha dimensioni $[L]$. Ricordo che il rapporto è entro radice quadrata, ma non ricordo mai chi tra g e ℓ è al numeratore. Facendo l'analisi dimensionale

$$T \propto \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \longrightarrow \quad [T] = [L]^{1/2}[LT^{-2}]^{-1/2} = [L^0T^1] \tag{1.11}$$

verifico immediatamente che la relazione corretta è quella con ℓ al numeratore. Ovviamente, non posso verificare quale è la costante di proporzionalità che manca (2π). Normalmente, la verifica che ho scritto in modo formale nella 1.11 si fa velocemente su un pezzettino di carta.

Tra le condizioni imposte dall'analisi dimensionale, vi è quella per cui **l'argomento di ogni funzione trascendente deve essere adimensionale.** La ragione *fisica* è che se io cambio le unità di misura in una funzione trascendente in cui compare una grandezza dimensionale, il risultato dipende dalle unità di misura scelte. Ad esempio, se scrivessi la legge del decadimento radioattivo come: $N(t) = N_o e^{-t}$ il risultato dipenderebbe da quali unità di misura io scelgo di utilizzare per il tempo: otterrei un numero diverso se utilizzo per il calcolo $t = 1$ (min), o $t = 60$ (s), anche si tratta della stessa quantità di tempo. Nessuna ambiguità vi è se la legge viene scritta come in eq. 1.5: $N(t) = N_o e^{-t/\tau}$, con τ una costante con precise unità di misura (secondi, minuti o anni).

La ragione *matematica* dell'affermazione sopra riportata è legata al fatto che ogni funzione è rappresentabile, in prossimità di un punto, come uno sviluppo di polinomi. Questa tecnica matematica si chiama *dello sviluppo in serie di Taylor*. La serie di Taylor di una funzione in un punto è la rappresentazione della funzione come un polinomio con coefficienti calcolati a partire dalle derivate della funzione stessa nel punto. Normalmente questo argomento viene affrontata al termine del corso di Analisi I, ma per ora potete limitarvi a verificare facilmente, facendo uso di una calcolatrice tascabile, che se $x \ll 1$ allora valgono i seguenti sviluppi notevoli:

$$\sin x \simeq x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \tag{1.12}$$

$$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \tag{1.13}$$

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \tag{1.14}$$

$$\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \tag{1.15}$$

$$(1+x)^a \simeq 1 + ax + o(x) \tag{1.16}$$

Il termine $o(x)$ significa che i termini successivi sono tutti di potenze superiori a quelle espresso dentro il simbolo. Poiché $x \ll 1$, ogni termine successivo a una potenza più elevata è molto più piccolo del precedente. Questo sviluppo in termini di potenze di x significa che ogni termine polinomiale avrebbe dimensioni fisiche differenti se x non fosse adimensionale!

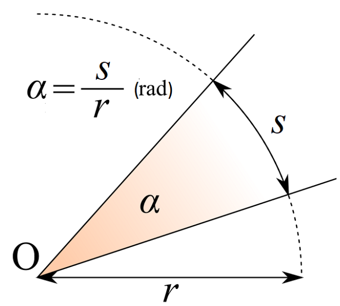

Figura 1.6. Definizione della misura degli angoli in radianti.

Un caso particolarmente importante è quello dell'ampiezza degli angoli. Nel linguaggio comune si usano i gradi. I gradi contengono una convenzione innaturale, ossia il fatto che un angolo giro corrisponda a 360°: avrebbe potuto essere qualsiasi altro numero. Invece il radiante è una unità di misura adimensionale, e per questo adottato nel SI. Infatti, un angolo misurato in radianti, come si evince dalla Fig. 1.6, è pari al rapporto tra l'arco di circonferenza s e il suo raggio. L'angolo giro corrisponde a un angolo $2\pi r/r = 2\pi$ radianti.

1.8 Quesiti ed esercizi

Quesiti

1. La mole è l'unità di misura della quantità di sostanza, ed è definita come la quantità di sostanza che contiene 6.0225×10^{23} entità elementari. Questo è il valore numerico della costante di Avogadro, N_A. La massa molecolare di una

sostanza è il rapporto tra la massa di una data quantità di quella sostanza e il numero di moli della stessa quantità di quella sostanza. È comunemente espressa in unità di massa atomica (u). La massa molecolare può essere calcolata come la somma delle masse atomiche di tutti gli elementi costituenti la molecola. Per esempio la massa molecolare dell'acqua (H_2O) è la somma di due masse atomiche di idrogeno (1.00794 u) e una di ossigeno (15.9994 u). Quante molecole di acqua vi sono in un grammo?

[R: 3.34×10^{22}]

2. Con i dati del quesito precedente, quante molecole di acqua vi sono in un cm^3 (in condizioni di pressione e temperatura standard)?

   [R: 3.34×10^{22}]

3. Determinare il numero n di atomi per cm^3 presenti nell'oro ($Z = 79, A = 197$, densità 19.3 g/cm^3) e stimare la distanza tra i centri di due atomi, assumendo che gli atomi si dispongano su un reticolo cubico.

   [R: $n = 6 \times 10^{22}$ cm^{-3}; distanza=2.6 10^{-8} cm.]

4. In un esperimento in cui dei nuclei di elio vengono inviati contro un bersaglio composto da 1 mm di oro, si osserva che il 99.9% giunge ad un rivelatore che si trova sulla linea del fascio. Assumendo che tutta la massa atomica sia concentrata nel nucleo di forma sferica, e trascurando le dimensioni del nucleo di elio, determinare il raggio del nucleo di oro. Un esperimento di questo tipo venne usato da Rutherford per determinare le dimensioni dei nuclei. Fare uso dell'analisi dimensionale e del numero n determinato nel quesito 3.

   [R: $\sim 2 \times 10^{-13}$ cm.]

5. La massa di un atomo è concentrata nel nucleo. Il raggio nucleare è esprimibile in termini del numero di massa A dalla relazione $R = 1.2A^{1/3}$ fm, dove 1 fm=10^{-15} m. La grandezza A rappresenta il numero di nucleoni, ossia la somma di protoni e neutroni. Si stimi la densità nucleare in termini della densità dell'acqua.

   [R: 2.3 10^{14} la densità dell'acqua.]

6. Una stella di neutroni è un oggetto con massa pari a circa 1.4 $M_\odot$, dove la massa solare $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg. La stella di neutroni è aggregata in maniera da avere densità pari a quella della materia nucleare determinata nel quesito 5. Determinare il raggio di una stella di neutroni.

   [R: $\sim$ 15 km]

7. La densità del mezzo interstellare nella nostra Galassia è misurato pari a 10^{-21} kg m^{-3} ed è costituito principalmente da idrogeno. Stimare quanti atomi di idrogeno per cm^3 sono presenti nella Galassia.

   [R: 0.6 atomi/cm^3]

8. La Galassia è schematizzabile come un disco di raggio 15 kpc e spessore 200 pc. Sapendo che 1 pc=3.08×10^{16} m, determinare il volume della Galassia e la massa totale del gas nel mezzo interstellare. Usare i dati del quesito 7.

   [R: $V \sim 4$ 10^{60} m^3; $M \sim 4$ 10^{39} kg^3]

9. Nella Galassia vi sono circa 10^{11} stelle di massa paragonabile al sole. Determinare massa totale M_s nelle stelle e la frazione di massa della Galassia sotto forma di mezzo interstellare (ism). Usare il valore determinato nel quesito 8 per la massa del mezzo interstellare.

   [R: $M_s \sim 2\ 10^{41}$ kg; $f_{ism} \sim 2\%$]

10. Una bicchiere riempito d'acqua ha raggio di 3 cm; lasciato aperto, in 4 ore il livello è sceso di 1 mm. Determinare, in grammi/ora, la velocità di evaporazione dell'acqua. Determinare inoltre quante molecole d'acqua evaporano in un secondo per cm^2 di superficie.

    [R: $v_{evp} \sim 0.7$ g/h; $\sim 5\ 10^{17}$ molecole cm^{-2} s^{-1}]

11. Tra il 2006 e il 2012 è stato operativo un fascio che inviava neutrini dal CERN, Ginevra, ai Laboratori del Gran Sasso in Italia, presso l'Aquila. La distanza in linea d'aria (ossia, lungo il cerchio terrestre massimo che passa tra i due siti) è di 730 km. Il punto di mezzo è all'incirca all'altezza di Pontremoli (Massa-Carrara). Determinare il percorso in linea retta dei neutrini, e quanti metri sotto Pontremoli passava il fascio. Il raggio terrestre è di circa 6370 km. [12]

    [R: L=729 km; il fascio passa 10.4 km sotto Pontremoli]

12. Osservando la relazione 1.12, determinare l'errore percentuale commesso usando l'approssimazione $\sin\theta = \theta$ per angoli pari a 10°, 5° e 1°.

    [R: 0.5%; 0.1%; 0.01%]

13. Tre grandezze fondamentali che connettono quantità definite in meccanica sono: *i*) la velocità della luce nel vuoto, $c = 299792458$ m s^{-1}; *ii*) la costante ridotta di Planck, $\hbar = 1.05459\ 10^{-34}$ J s. Essa definisce il "quanto" del momento angolare, grandezza introdotta nel Cap. 7; *iii*) la costante di gravitazione universale $G = 6.67259\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}, introdotta nel Cap. 10. Nel modello standard che descrive il macrocosmo (teoria del *Big Bang*) la combinazione di queste grandezze fondamentali assume un ruolo estremamente importante. Usando l'analisi dimensionale, ottenete combinando $\hbar, c$ e G una grandezza con le dimensioni di una massa. Questa grandezza viene indicata con m_P e si chiama *massa di Planck*. Determinarne il valore il kg di m_p. [Nota: 1 N (newton)=1 kg m s^{-2}; 1 J (joule) = 1 kg m^2 s^{-2}].

    [R: $m_P = 2.17\ 10^{-8}$ kg]

14. Sempre facendo uso delle tre grandezze introdotte nel quesito 13, usando l'analisi dimensionale ottenere la grandezza con le dimensioni di un tempo, t_P, chiamato *tempo di Planck*. Esprimere t_P in s.

    [R: $t_P = 5.4\ 10^{-44}$ s]

15. Sempre facendo uso delle tre grandezze introdotte nel quesito 13, usando l'analisi dimensionale ottenere la grandezza con le dimensioni di una lunghezza, l_P, chiamata *lunghezza di Planck*. Esprimere l_P in m.

    [R: $l_P = 1.16\ 10^{-35}$ m]

[12] Nota per ministri dell'istruzione italiani: non occorre alcun tunnel tra il CERN e il Gran Sasso per la propagazione dei neutrini.

Esercizio 1.1

La legge del decadimento radioattivo è data dalla relazione $N(t) = N_o e^{-\lambda t}$, dove N_o è il numero iniziale di nuclei di una certa sostanza, $N(t)$ quelli rimasti dopo un certo tempo t e λ una costante caratteristica di ogni sostanza radioattiva. Il tempo di dimezzamento, $t_{1/2}$, è il tempo necessario per osservare il dimezzamento del numero iniziale di elementi. L'attività $A(t)$ è il numero di decadimenti per unità di tempo (unità: 1 disintegrazione/s= 1 Bq). L'isotopo ${}^{14}_{6}$C del carbonio ha tempo di dimezzamento $t_{1/2}$=5730 anni ed è presente in natura con una concentrazione, rispetto all'isotopo stabile ${}^{12}_{6}$C, pari a $r = {}^{14}_{6}\mathrm{C}/{}^{12}_{6}\mathrm{C} = 1.17 \times 10^{-12}$. Il ${}^{12}_{6}$C ha concentrazione in natura pari al 99% del totale. La costante di Avogadro è pari a 6.02 10^{23} mol^{-1}.

1. Determinare la relazione funzionale tra $t_{1/2}$ e λ e il valore di λ per ${}^{14}_{6}$C.
2. Mostrare che la relazione funzionale tra l'attività $A(t)$ e λ è data da $A(t) = \lambda N(t)$.
3. Determinare l'attività di 1 g di carbonio naturale appena ottenuto da combustione.
4. L'attività misurata di un pezzo di carbone di massa m=25 g proveniente da una fornace etrusca è pari a 250 decadimenti/minuto. Determinare l'età del campione.
5. Il limite di datazione con la tecnica del ${}^{14}_{6}$C è circa 50000 anni. In un campione con tale età, qual è la percentuale di radioisotopi ${}^{14}_{6}$C rimasta?